Statistiques

SCIENCES DE LA VIE

Chap. III

Pr. Mostafa El Yassa

Variables aléatoires à densité

Chap. III : Variables aléatoires à densité

A. Définitions Et Propriétés

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

Variables aléatoires : *Définition*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle variable aléatoire réelle ($v.a.r$) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$, $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$, ayant la propriété suivante :

pour tout un intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$

Variables aléatoires à densité : *Fonction de densité et loi de probabilité*

On appelle **densité de probabilité** toute fonction continue par morceaux sur IR telle que:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

On dit qu'une v.a.r ***X*** admet $f(x)$ comme densité si :

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Dans ce cas, on dit que X est absolument continue, et on a :

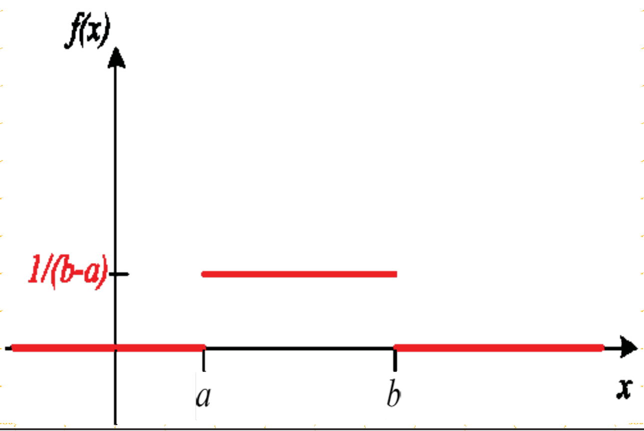
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \; ; \; P(X = a) = 0$$

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

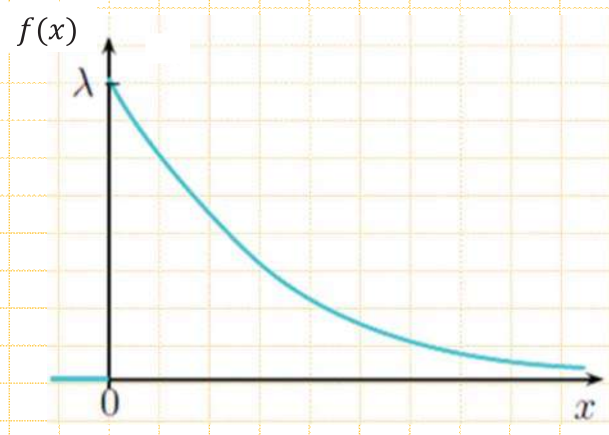
Variables aléatoires à densité

Fonction de densité et loi de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a\,,b] \\ 0 & si\ x \notin [a\,,b] \end{cases}$$

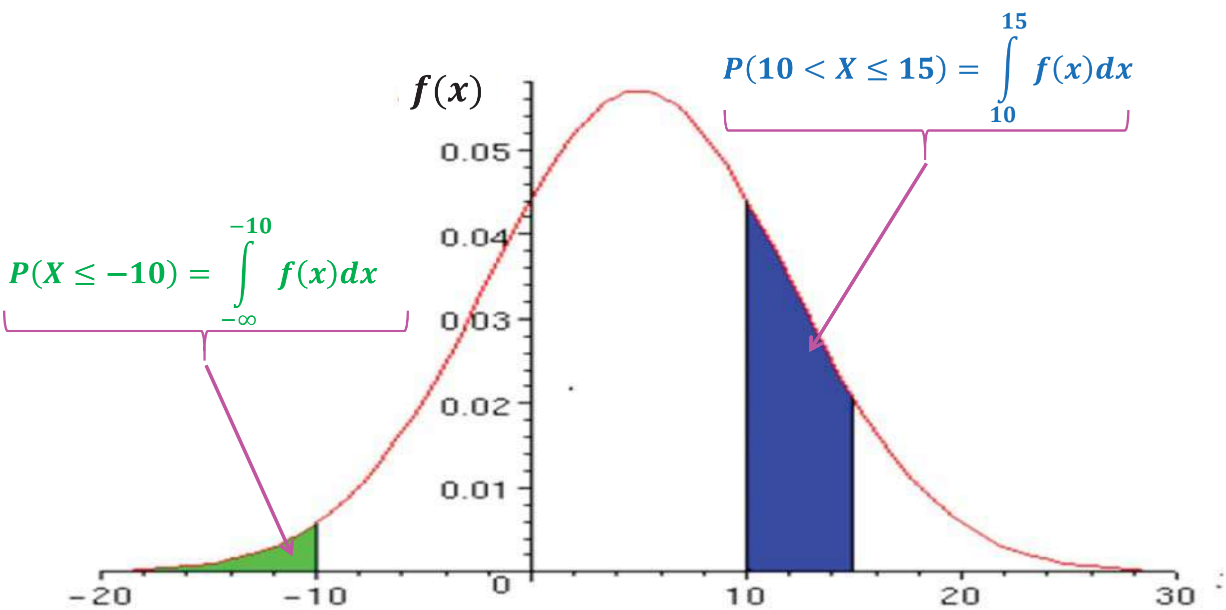


$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$



Variables aléatoires à densité:

Fonction de densité et loi de probabilité



Variables aléatoires à densité :
Fonction de répartition

Soit X une v.a.r absolument continue de densité $f(x)$, la fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du$$

- La fonction de répartition permet de calculer la probabilité de tomber dans n'importe quel intervalle

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(u)du = F(b) - F(a)$$

Variables aléatoires continues :
Fonction de répartition

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

Propriétés :

Soit F la fonction de répartition d'une v.a absolument continue X de densité f alors :

1. F est croissante
2. F est continue sur $\mathbb{R}$
3. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$
4. en tout point où f est continue, F est dérivable et on a $$F'(x) = f(x).$$

Variables aléatoires à densité: *Espérance mathématique*

Soit X une v.a.r absolument continue de densité $f(x)$, on définit l'espérance mathématique de X par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Ceci suppose que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge.

Propriétés :

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{E}(aX + b) = aE(X) + b$
2. Si $\mathrm{X} \geq 0$ *alors* $E(X) \geq 0$

Variables aléatoires à densité : *Espérance mathématique , théorème de transfert*

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f et soit φ une fonction *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, alors $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire et on a :

$$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx$$

En particulier :

$$\mathrm{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx \quad et \quad \mathrm{E}(X^\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha f(x)dx$$

Variables aléatoires à densité:

variance et écart type

Soit X une v.a.r absolument continue de densité $f(x)$, on définit La variance de X par :

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$$

On appelle écart-type, noté $\sigma(X)$, la racine de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Chap. III : Variables aléatoires à densité

B. Lois Usuelles

Variables aléatoires à densité
Lois usuelles : loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$

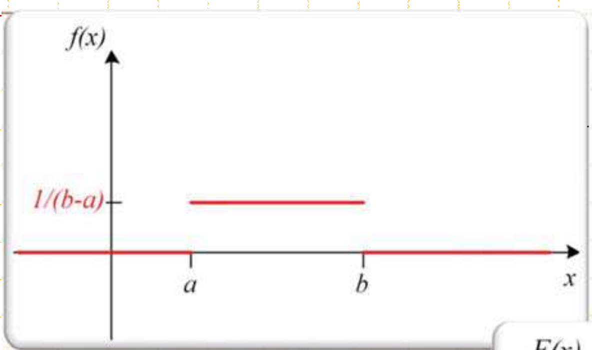
- La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment [a , b], notée $\mathcal{U}(a,b)$, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a\,, b] \\ 0 & si\ x \notin [a\,, b] \end{cases}$$

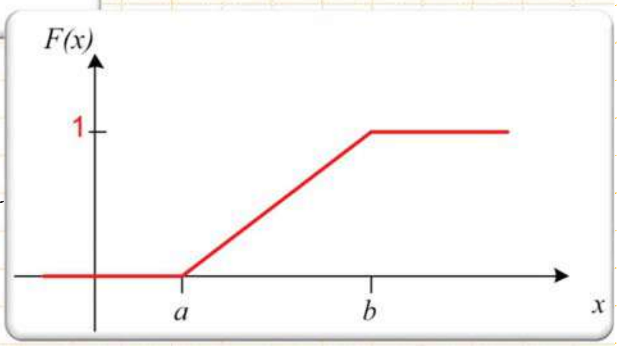
- La fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > b \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a\,, b] \\ 0 & si \quad x < a \end{cases}$$

Variables aléatoires à densité
Lois usuelles : loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$



Densité de $\mathcal{U}(a,b)$



Fonction de répartition de $\mathcal{U}(a,b)$

Variables aléatoires à densité

Lois usuelles : loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$

- L'espérance mathématique de la loi uniforme sur l'intervalle [a , b] est :

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}$$

- La variance de la loi uniforme $\mathcal{U}(a,b)$:

$$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

En effet :

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{\left(b-a\right)^2}{12}$$

Variables aléatoires à densité

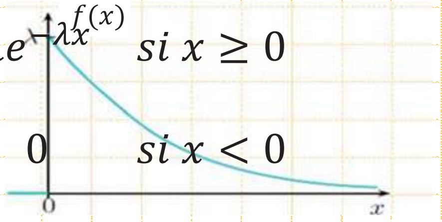
Lois usuelles : loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

- Cette variable aléatoire sert souvent à modéliser la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, sans vieillissement ou sans usure .
  - La durée de vie de la radioactivité; chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle
  - La durée de vie d'un composant électronique
  - L'intervalle de temps séparant deux évènements Poissonniens ; deux pannes consécutives, ou deux accidents, deux appels téléphoniques, …

Variables aléatoires à densité
Lois usuelles : loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

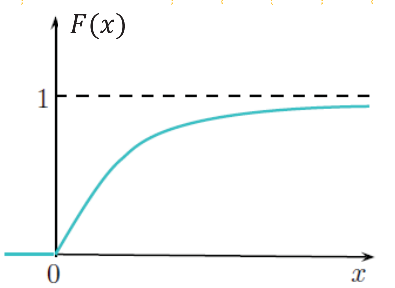
- La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$



- La fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \\ 0 & si \end{cases}$$



Variables aléatoires à densité
Lois usuelles : loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

- L'espérance mathématique de la loi exponentielle est :

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- La variance de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$:

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2 = \int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

Variables aléatoires à densité
Lois usuelles : loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

- On appelle demi-vie de X la valeur h telle que $P(X > h) = 1/2$:

$$P(X > h) = 1 - F(h) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda h} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{ln(2)}{\lambda} = ln(2)E(X)$$

- Propriété d'Absence de mémoire :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \; P\left({(X>s+t)}/{(X>t)}\right) = P(X > s)$$

X suit une loi exponentielle
⇕
X vérifie la propriété d'absence de mémoire

La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$
Exemple 1

On modélise la durée de vie d'un processeur (en années) par une loi exponentielle de paramètre 1/2.

a. Que vaut la durée de vie moyenne d'un tel processeur ?

b. Avec quelle probabilité le processeur fonctionne-t-il plus d'une année?

Réponses :

Soit T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un processeur (en années) ; $T \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$: $P(X \leq t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}, pour\ t \geq 0.$

a. $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 2$

b. La probabilité qu'un processeur fonctionne plus d'une année :

$$P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1) = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0{,}6065$$

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$
Exemple 2

Un atome de strontium 90 reste radioactif pendant une durée aléatoire T qui suit une loi exponentielle, durée au bout de laquelle il se désintègre.

Sa demi-vie est d'environ 28 ans.

a. Déterminer le paramètre λ de la loi de T.

b. Calculer la probabilité qu'un atome reste radioactif durant au moins 50 ans.

Réponses :

a. La valeur de λ : $\mathrm{h} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{h} = \frac{\ln(2)}{28} \simeq 0{,}0248$

b. $P(T \geq 50) = \mathrm{e}^{-\lambda 50} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{28}50} \simeq \mathrm{e}^{-0{,}0248\times 50} \simeq 0{,}2893$

Variables aléatoires continues
Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

La loi normale est la loi la plus importante des probabilités et des statistiques.

On rencontre la loi normale lorsqu'on a une variable aléatoire continue qui :

- dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes
- les effets des causes s'additionnent
- aucune cause n'est prépondérante

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

- La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ, σ, notée $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, si sa densité de probabilité est donnée par :

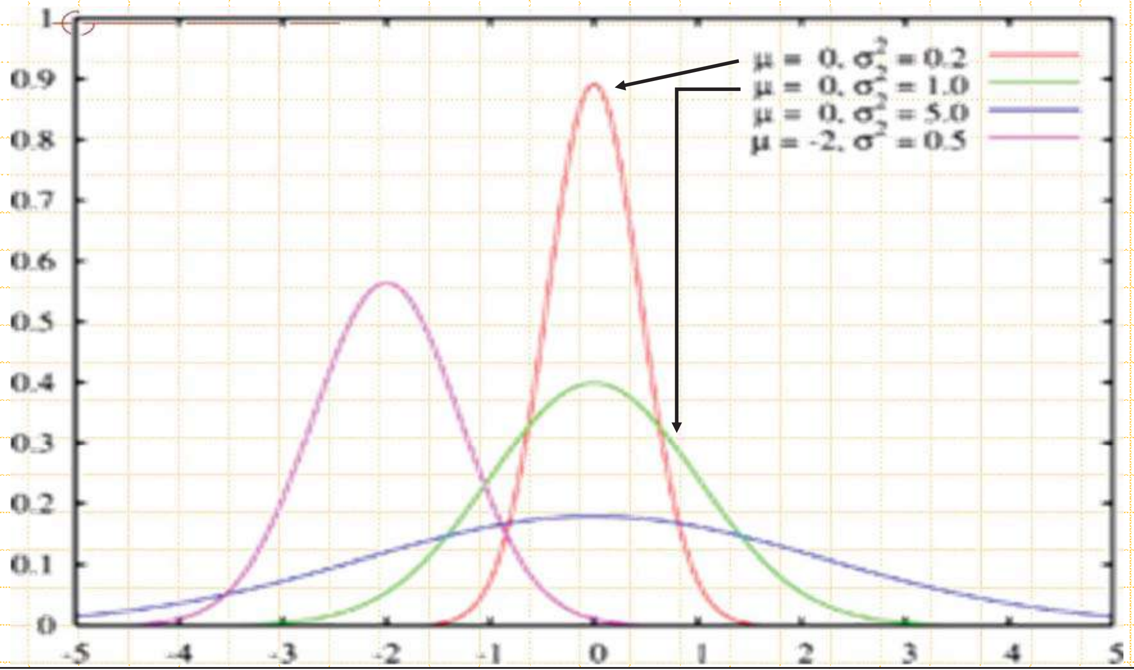
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Pour une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$: E(X)= μ et Var(X)=σ^2

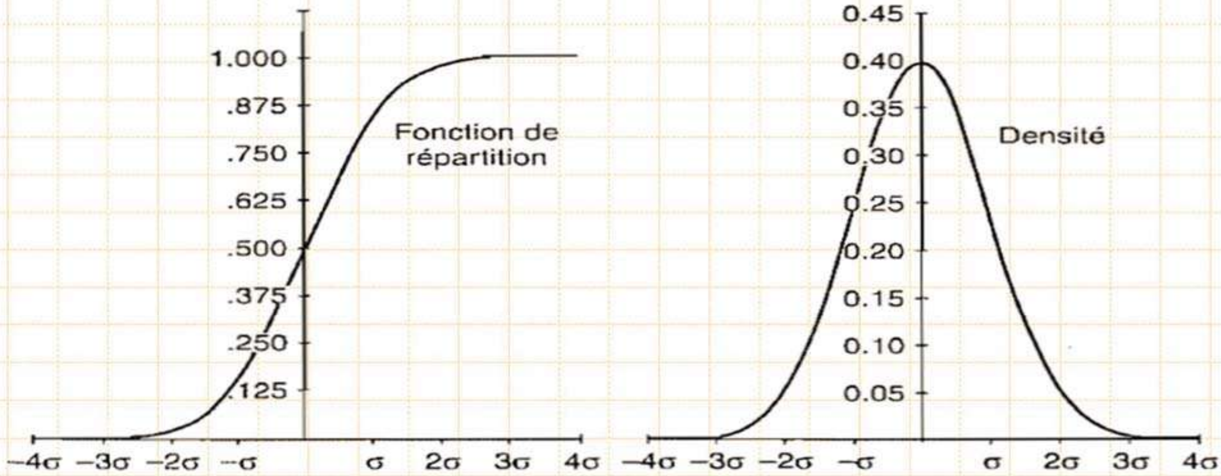
- Lorsque $\mu = 0, \sigma = 1$, cette loi est dite loi normale centrée réduite : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$



Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ fonction de répartition



Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$

Propriétés (Transformation affine) :

Soit X une v.a.r de loi $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$, alors :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\,, on\ a$:

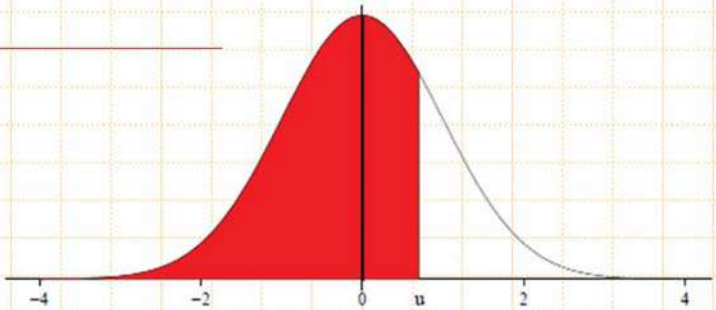
$$Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b\,, a^2\sigma^2)$$

- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\,,1)$

On utilise cette propriété pour calculer les probabilités de $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$ à partir de $\mathcal{N}(0\,,1)$:

$$P(X \le t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

Table de la loi normale $X \sim \mathcal{N}(0,1)$



Valeurs de $\Pr(X \leq u)$ en fonction de u.

u	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

La fonction de répartition d'une loi normale n'admet pas d'expression analytique élémentaire; c'est pourquoi on utilise une table qui donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0\,,1)$: $\Phi(t)$

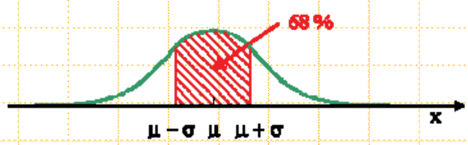
$$P(X \leq 0{,}58) = \Phi(0{,}58) = 0{,}7190$$

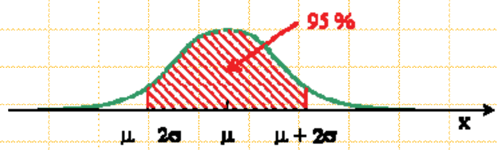
$$P(X \leq -0{,}58) = 1 - P(X \leq 0{,}58)$$

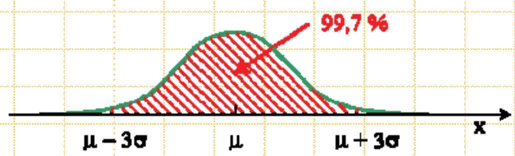
$$= 1 - \Phi(0{,}58) = 0{,}2810$$

Lois usuelles : loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Valeurs remarquables

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}68$
- $P(\mu - 1{,}5\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}5\sigma) = 0{,}87$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}997$







Variables aléatoires continues

Lois usuelles : lois utilisées en statistique

Nous allons examiner quelques lois construites à partir de la lois normales. Ces lois sont surtout utilisées en statistique

1. Loi khi-deux χ^2 :
   utilisée en statistique pour effectuer des tests
2. Loi de Student :
   utilisée pour calculer l'intervalle de confiance d'une estimation

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi khi-deux χ^2

- La variable aléatoire X suit une **loi de χ^2** , khi-deux, de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ (dit *degrés de liberté) notée* $\chi^2(n)$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \dfrac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

où : $\Gamma(k) = (k-1)!$ et $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}}\right)$

- E(X)= n
- Var(X)=2n

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi khi-deux χ^2

Théorème :

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant toute une loi normale centrée réduite alors la variable $S = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ suit une loi de khi-deux de n degrés de liberté : $\chi^2(\text{n})$.

Remarque :

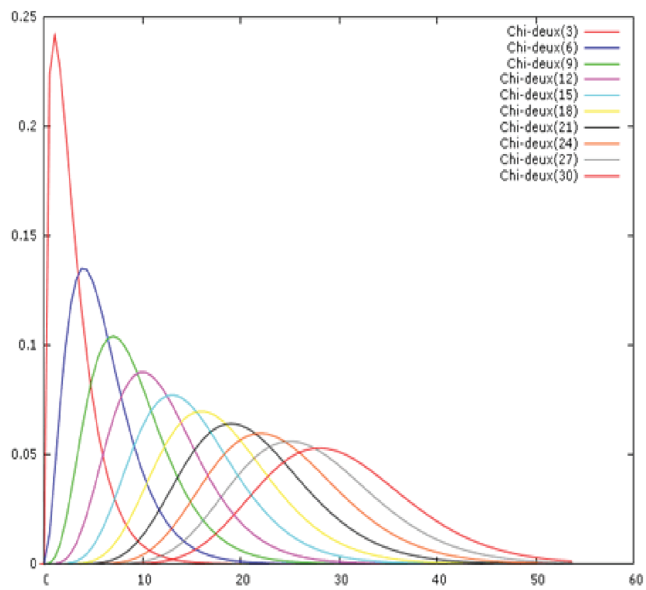
- On utilise des tables pour déterminer en fonction de n *et* α la valeur de v telle que : $P(X \geq v) = \alpha$, ***α est appelé seuil.***
  Souvent, on pend $\alpha = 5\%$ ou 2,5%

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi khi-deux χ^2

SMC4 : 2016-2017

$n \backslash \alpha$	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	32,0	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,56	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0



Variables aléatoires continues
Lois usuelles : loi de Student

- La variable aléatoire T suit une **loi de Student**, de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ (dit *degrés de liberté) notée* $t(n)$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

où : $\Gamma(k) = (k-1)!$ et $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}}\right)$

- E(T)= 0
- Var(T)=$\frac{n}{n-2}$, $si\ n > 2$

Variables aléatoires continues
Lois usuelles : loi de Student

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

Théorème :

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \mathcal{N}(0\,,1)$ et $Y \sim \chi^2(\mathrm{n})$, alors la variable aléatoire $\mathbf{T} = \boldsymbol{X} \Big/ \sqrt{\frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{n}}}$ suit une loi de Student de n degrés de liberté .

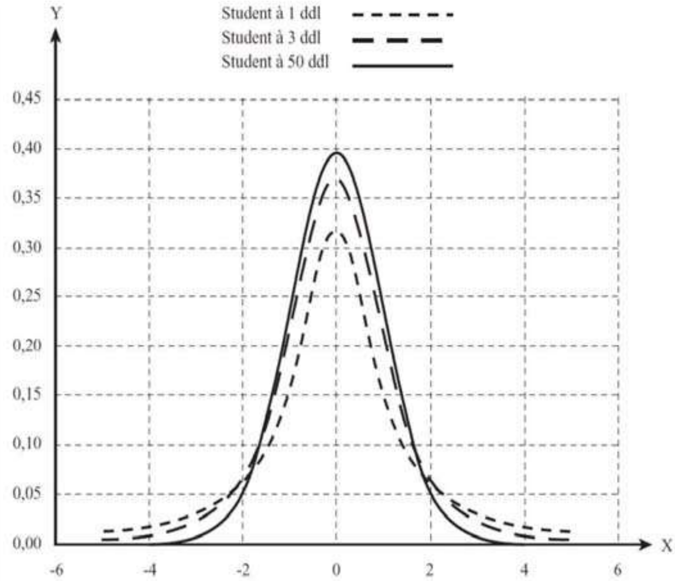
Remarque :

- On utilise des tables pour déterminer en fonction de n *et* α la valeur de v telle que : $P(X \geq v) = \alpha$, $\boldsymbol{\alpha}$ ***est appelé seuil***

Variables aléatoires continues

Lois usuelles : loi de Student

α	25 %	20 %	15 %	10 %	5 %	2,5 %	1 %	0,5 %	0,25 %	0,1 %	0,05 %
$1-\alpha$	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,75 %	99,9 %	99,95 %
k											
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437



Lois usuelles : Khi-2 , Student

- Khi-deux :
  $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i\ ,\ X_i \sim \mathcal{N}(0\,,1)$ alors : $(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) \sim \chi^2(n)$

- Student :
  X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(0\,,1)$ et $Y \sim \chi^2(\mathrm{n})$, alors : $\dfrac{\boldsymbol{X}}{\sqrt{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{n}}} \sim \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$

Chap. III : Variables aléatoires à densité

C. Théorèmes de convergence

Théorèmes de convergence

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

- Théorème de Moivre-Laplace :

  Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.d telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n\,,p)$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

$$où\ \Phi(t)\ est\ la\ fonction\ de\ répartition\ de\ \mathcal{N}(0\,,1)$$

- Ceci signifie : pour n assez grand, la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ « se comporte comme » la loi normale d'espérance np et de variance $np(1-p)$, $\mathcal{N}(np\,,np(1-p))$

La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

- En pratique, on approche une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np\,,np(1-p))$ lorsque :

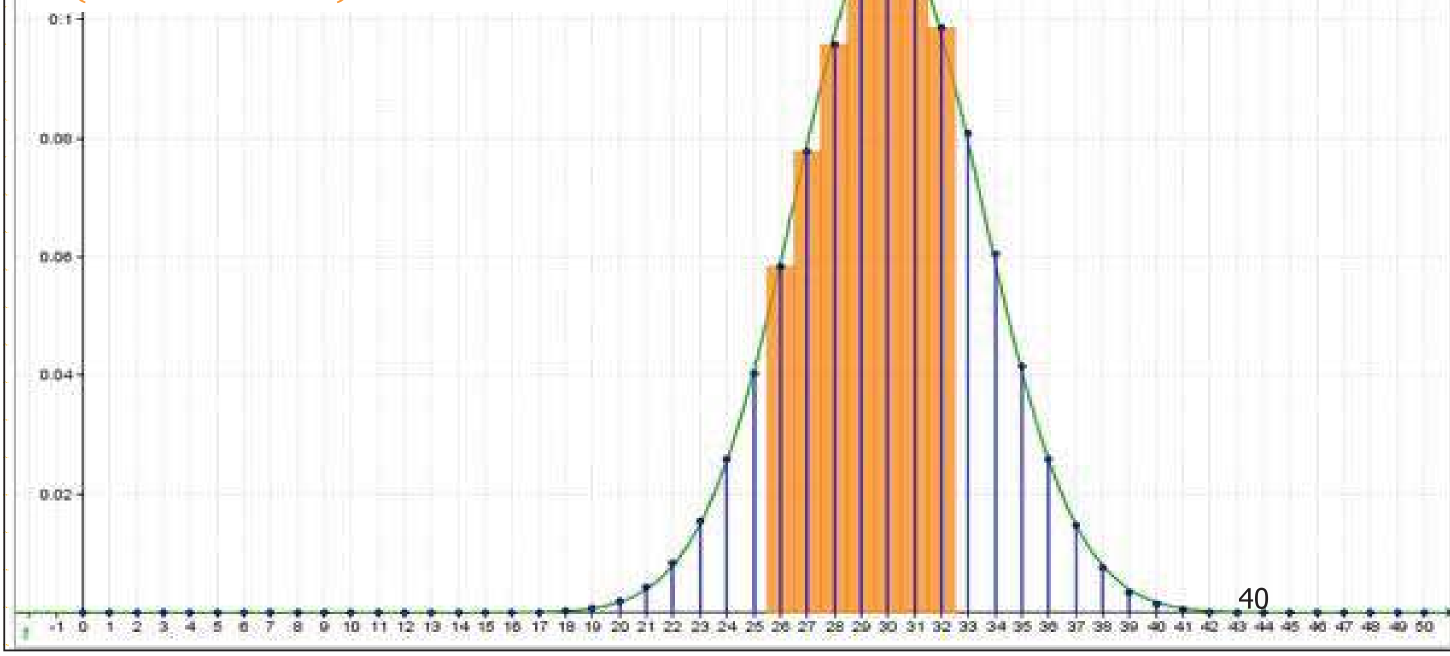
  $$\boldsymbol{n > 30\,,\ np > 5\ \ ,\ n(1-p) > 5}$$

  (pour n grand et p pas trop proche de 0 ni de 1)
- Approcher la loi binomiale par la loi normale c'est remplacer une loi discrète par une loi continue
- Pb : Si Z est absolument continue alors on a : $P(Z=x)=0$
  Comment approcher une loi de probabilité discrète par une loi absolument continue ? C'est la correction de continuité

En bleu la loi binomiale : $\mathcal{B}(50\,;0,6)$

En vert la loi Normale : $\mathcal{N}(30\,,12)$

$\boldsymbol{P(26 \le X \le 32)}$



La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Régles à suivre pour remplacer une variable discrète X par une variable absolument continue X_c : « correction de continuité »

- $P(X = k) \cong P(k - 0{,}5 < X_c \leq k + 0{,}5)$
- $P(X \leq k) \cong P(X_c \leq k + 0{,}5)$
- $P(X < k) \cong P(X_c \leq k - 0{,}5)$
- $P(X \geq k) \cong P(X_c > k - 0{,}5)$
- $P(X > k) \cong P(X_c > k + 0{,}5)$

La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Exemple : On considère une variable aléatoire $X\sim\mathcal{B}\left(400\,;\frac{1}{2}\right)$.

Calculons $P(X = 210)$ et $P(190 \leq X < 200)$.

On a : $\boldsymbol{n > 30}$, $\boldsymbol{np = 200 > 5}$, $\boldsymbol{n(1-p) = 200 > 5}$

On peut approcher la loi de X par la loi $\mathcal{N}(200\,,100)$;

soit $Y\sim\mathcal{N}(200\,,100)$

$$P(X = 210) \cong P(209{,}5 < Y \leq 210{,}5) = P\left(0{,}95 < \frac{Y - 200}{10} \leq 1{,}5\right)$$

$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}95) = 0{,}8531 - 0{,}8289 = 0{,}0242$$

SMC4 : 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.3 Pr. ELYASSA

La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,,\sigma^2)$

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

$$P(190 \leq X < 220) \cong P(189{,}5 < Y \leq 219{,}5)$$

$$= P\left(-1{,}05 < \frac{Y-200}{10} \leq 1{,}95\right)$$

$$= \Phi(1{,}95) - \Phi(-1{,}05)$$

$$= \Phi(1{,}95) - \big(1 - \Phi(1{,}05)\big)$$

$$= \Phi(1{,}95) + \Phi(1{,}05) - 1$$

$$= 0{,}9744 + 0{,}8531 \; - 1 = 0{,}8275$$

Théorèmes de convergence

la loi faible des grand nombres

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a indépendantes de même loi de d'espérance μ et d'écart type σ et soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i$,

alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

- ✓ Ceci signifie que : lorsque ***n est grand***, la moyenne empirique $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers l'espérance μ .
- ✓ la loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire de **grande taille** dans une population, la moyenne des valeurs observées se rapprochent de la moyenne de la population.

Théorèmes de convergence

Théorème central limite

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a indépendantes de même loi de moyenne μ et d'écart type σ et soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le t\right) = \Phi(t)$$

où $\Phi(t)$ *est la* fonction *de répartition de* $\mathcal{N}(0\,,1)$

Ceci signifie que lorsque ***n* est assez grand** :

- ✓ la loi de $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ se comporte comme une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,,\frac{\sigma^2}{n}\right)$
- ✓ la valeur moyenne sur un grand nombre de mesures d'une grandeur physique suit une loi normale de moyenne μ et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$

Théorème Central Limite

approximation de la loi de poisson et la loi χ^2

- Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est $\mathcal{P}(n\lambda)$ et lorsque n est assez grand, on peut approchée cette loi par la loi normale $\mathcal{N}(n\lambda\,,n\lambda)$ d'après le théorème central limite.
  - Ceci implique que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et si **λ est assez grand** alors on peut approximer la loi de X par $\mathcal{N}(\lambda\,,\lambda)$;
    en pratique on applique cette approximation lorsque $\lambda \ge 15$
- Aussi, on peut approximer la loi $\chi^2(\mathrm{n})$ par la loi normale $\mathcal{N}(n\,,2n)$ pour ***n* est assez grand.** en pratique on applique cette approximation lorsque $n \ge 20$

Théorème Central Limite
approximation de la loi de poisson

Exemple : soit $X \sim \mathcal{P}(20)$, calculons $P(X = 25)$ et $P(X \leq 25)$

- $P(X = 25) = \frac{20^{25}}{25!} e^{-25} = 0{,}0446$

  En utilisant l'approximation par $X_c \sim \mathcal{N}(20, 20)$:

  $$P(X = 25) \cong P(24{,}5 < X_c \leq 25{,}5)$$

  $$\cong P\left(\frac{4{,}5}{\sqrt{20}} < \frac{X_c - 20}{\sqrt{20}} \leq \frac{5{,}5}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(1{,}23) - \Phi(1{,}01) = 0{,}0469$$

- $P(X \leq 25) = e^{-20} \sum_{k=0}^{25} \frac{20^k}{k!}$

  $$\cong P(X_c \leq 25{,}5) = P\left(\frac{X_c - 20}{\sqrt{20}} \leq \frac{5{,}5}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(1{,}23) = 0{,}8907$$

Bon courage

LIENS UTILES

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage