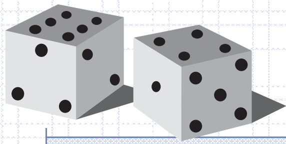
Statistiques

SCIENCES DE LA VIE

Chap. II

Pr. Mostafa El Yassa

Variables aléatoires discrètes



Chap. II : Variables aléatoires discrètes

A. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes : Introduction

- Lorsque on associe aux résultats d'une expérience aléatoire des valeurs numériques dans un ensemble fini ou dénombrable, on parle de variable aléatoire discrète.
- Les variables aléatoires discrètes sont caractérisées par :
  - les valeurs qu'elles peuvent prendre
  - les probabilités avec lesquelles elles prennent ses valeurs.
- À une même expérience aléatoire on peut associer plusieurs variables aléatoires

Variables aléatoires discrètes : Exemple

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

On considère l'expérience : on lance deux dés équilibrés.

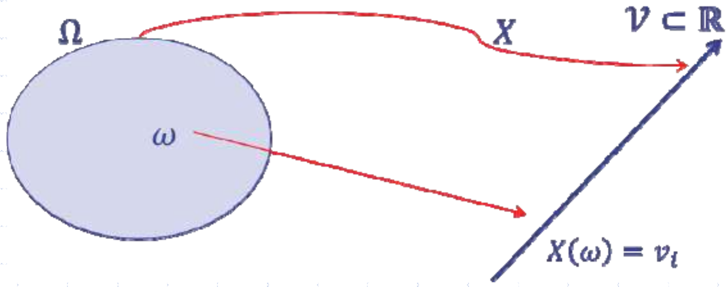
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)\}\,;\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)\,;\ P(\omega_i) = \frac{1}{36}$$

- Si on s'intéresse à la somme $\boldsymbol{S}$ des valeurs indiquées par les dés alors $\boldsymbol{S}$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{V} = \{2, 3, \cdots, 12\}$
- Si on considère la plus grande, $\boldsymbol{SUP}$, des valeurs indiquées par les dés alors $\boldsymbol{SUP}$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{V} = \{1, 2, \cdots, 6\}$

Variables aléatoires discrètes : *Définition*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, soit $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots\}$ un ensemble fini ou dénombrable de valeurs numériques.
On appelle variable aléatoire discrète ($v.a.d$) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ toute application X de Ω dans $\mathcal{V}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall v \in \mathcal{V}, \qquad X^{-1}(v) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = v\} \in \mathcal{F}$$



Variables aléatoires discrètes : *Loi de probabilité d'une v.a.d*

Soit X une v.a.d a valeurs dans $\mathcal{V} = X(\boldsymbol{\Omega}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$.
La loi de probabilité ou distribution *de* X, notée P_X , *est* définie par les probabilités $\boldsymbol{p_i}$ des évènements $\{X = v_i\}$:

$$p_i = P_X(v_i) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = v_i\})$$

- La loi de probabilité est entièrement déterminée par la donnée de (v_i, p_i) *pour tout* $v_i \in X(\boldsymbol{\Omega})$.
- Si $X(\boldsymbol{\Omega})$ est fini, on peut déterminer la loi de X par le tableau de distribution :

$X =$	v_1	v_2	$\ldots$	v_{n-1}	v_n
$P_X =$	p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n

Variables aléatoires discrètes :
Exemple de loi de probabilité

+	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

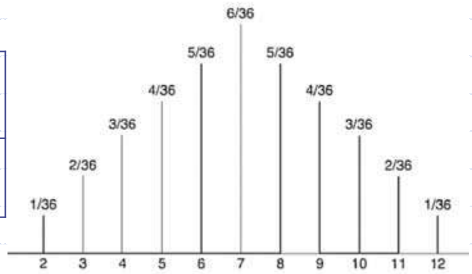
Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés :

Ω = {(1, 1), (1, 2) , . . . , (6, 5), (6, 6)};

Soit la v.a.d X égale à la somme des points des deux dés ; **X est une $\boldsymbol{v.a.d}$** et l'ensemble des valeurs de **X** est **: X(Ω)={2, 3, …, 11, 12}.**

La loi de probabilité de X est :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Variables aléatoires discrètes :
Exemple de loi de probabilité

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré plusieurs fois de suite, jusqu'à l'obtention de « 1 » pour la première fois. Soit X le nombre de lancés effectués.

$\boldsymbol{X}$ est une variable aléatoire entière et l'ensemble des valeurs possibles de $\boldsymbol{X}$ est **:** $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots\} = \mathbb{N}^*$**.**

La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{P_X(n) = P(\{X = n\}) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$$

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes :
Fonction de répartition d'une v.a.d

Soit X une $v.a.d$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et a valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$; $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$.
On appelle *fonction de répartition de X*, la fonction F_X définie par :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longrightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{i:\, x_i \leq t} P_X(x_i)$$

- La fonction de répartition est entièrement déterminée par la donnée du couple $(x_i, F_X(x_i))$ *pour tout* $x_i \in X(\Omega)$.

Variables aléatoires discrètes :
Exemple de fonction de répartition

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés. Soit la v.a.d Y égale à *l'inf* des points des deux dés ; Y *est une* $v.a.d$ et l'ensemble des valeurs de Y est $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La loi de probabilité de Y et sa fonction de répartition sont entièrement déterminées par le tableau suivant :

y_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F_Y(y_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

- *A partir de ce tableau on calcule les valeurs de $F_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:*
  $F_Y(0{,}5) = 0$; $F_Y(3{,}2) = \frac{27}{36}$; $F_Y(8) = 1$

Variables aléatoires discrètes :

Exemple de fonction de répartition

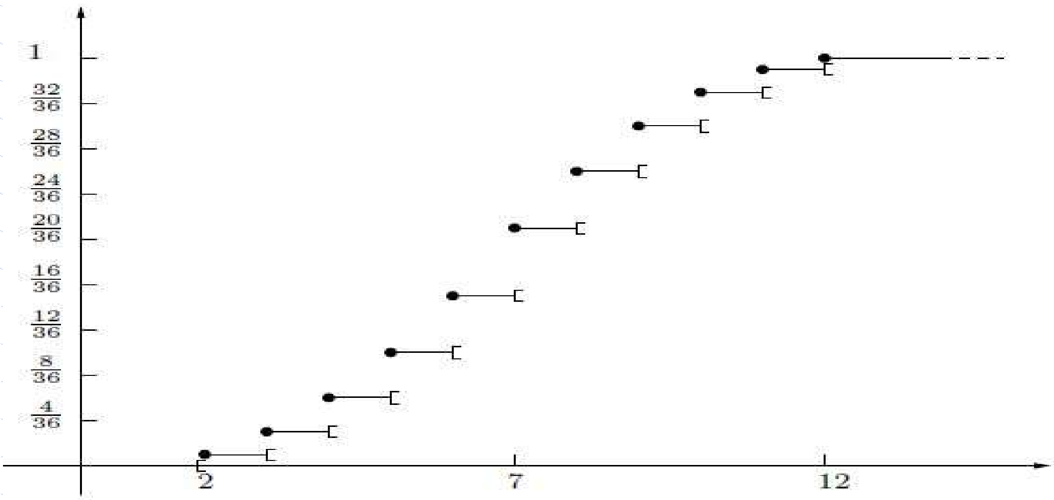
Soit la v.a.d X égale à la somme des points des deux dés ; $X(\Omega)=\{2, 3, \ldots, 11, 12\}$. La fonction de répartition de X est donnée par le tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

- Il en résulte : $F_X(1) = 0; F_X(6{,}9) = \frac{15}{36}$; $F_X(12{,}1) = 1$

Variables aléatoires discrètes :

Exemple de fonction de répartition



- Fonction de répartition pour la somme de deux dés.

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes : *Propriétés des Fonctions de répartition*

1. $F_X(t)$ est croissante;
2. $F_X(t)$ est une fonction en escaliers ;
3. $F_X(t)$ est continue à droite
4. $F_X(t)$ entièrement déterminée par les valeurs $F_X(v_i)$
5. Si $a < b$ $alors$ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
6. $P_X(t) = F_X(t) - F_X(t^-)$ où$F_X(t^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(t - \varepsilon)$

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

Soit X une $v.a.d$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et a valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. On dit que la variable X admet une espérance lorsque la série $\sum x_i P_X(x_i)$ est absolument convergente c'est-à-dire :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i| P_X(x_i) < \infty$$

Dans ce cas on appelle espérance mathématique de X la valeur $E(X)$ définie par :

$$\mathrm{E(X)} = \sum_i x_i P_X(x_i) = \sum_i x_i p_i$$

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes :
Espérance mathématique

Exemple :

On lance 3 pièces de monnaie équilibrées, et par X on désigne le nombre de piles obtenus.

La loi de X est donnée par le tableau de distribution:

x_i	0	1	2	3
$p_i = P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Variables aléatoires discrètes :
Espérance mathématique

Dans un jeu, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés. Au départ de chaque partie le joueur doit miser 5dh.

Si les deux dés présentent le même chiffre, le joueur empoche le montant marqué par les dés (2 Dh pour le double un, etc.). Sinon, il perd .

En désignant par X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, cherchons la loi de probabilité de X et le gain moyen.

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$;
- $X(\Omega) = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$;

x_i	-5	- 3	-1	1	3	5	7
p_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

- $E(X) = -5 \times \frac{5}{6} + \frac{1}{36}(-3 - 1 + 1 + 3 + 5 + 7) = -\frac{13}{6} \cong -3{,}83$

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

Exemple :

On lance 1 pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'à ce que « Pile » apparaisse pour la première fois. On suppose que la probabilité d'avoir Pile est $p \in]0\,,1[$.

Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier « Pile ». X est une $v.a.d$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- La loi de X est donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_X(n) = P(\{X = n\}) = p(1-p)^{n-1}$
- Et espérance de X est égale :

$$E(X) = p\sum_{n=1}^{+\infty} n \times (1-p)^{n-1} = \frac{1}{p}$$

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

Théorème de transfert

Soit X une $v.a.d$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega\,,\mathcal{F},P)$ et soit φ une application définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2\,, \dots, x_n, \dots\}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = \varphi(X)$ est une $v.a.d$ et lorsque l'espérance de Y existe on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}\big(\varphi(X)\big) = \sum_i \varphi(x_i)P_X(x_i) = \sum_i \varphi(x_i)p_i$$

En particulier : $\mathrm{E}(|X|) = \sum_i |x_i|\, P_X(x_i)$ *et* $\mathrm{E}(X^\alpha) = \sum_i {x_i}^\alpha\, P_X(x_i)$

Ceci signifie que l'on peut calculer l'espérance de Y sans connaitre sa loi, en utilisant la loi de X

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

Exemple d'utilisation du théorème de transfert :
On lance 3 pièces de monnaie équilibrées. Par X on désigne le nombre de piles obtenus. On considère les *v.a.d* $Y = X^2, \ Z = \sqrt{X}$, alors on a :

- La loi de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- *L'espérance de Y et de Z :*
  - $E(Y) = E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$
  - $E(Z) = E(\sqrt{X}) = 0 \times \frac{1}{8} + \sqrt{1} \times \frac{3}{8} + \sqrt{2} \times \frac{3}{8} + \sqrt{3} \times \frac{1}{8} \cong 1{,}122$

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

- Linéarité de l'espérance:

Soient X *et* Y deux $v.a.d$ admettant une espérance, a *et* b deux réels, alors la $v.a.d$ $Z = (aX + bY)$ admet aussi une espérance et on a : $E(Z) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

  - En particulier : $E(aX + b) = aE(X) + b$

- Positivité de l'espérance

Soient X *et* Y deux $v.a.d$ admettant une espérance et telles que $P(X \leq Y) = 1$, alors on a : $E(X) \leq E(Y)$.

  - En particulier : si $X \geq 0$, i.e. $P(\{X \geq 0\}) = 1$, alors $\boldsymbol{E(X) \geq 0}$.

Variables aléatoires discrètes : *Espérance mathématique*

Soit X une $v.a.d$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- *Relation entre $E(X)$ et $E(|X|)$*

  X admet une espérance si et seulement si $|X|$ en admet une et on a : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

- *Relation entre $E(X)$ et $E(X^2)$*

  Si X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance.

- *Inégalité de Markov*

  Si X admet une espérance, alors : $\forall a \geq 0,\ a\mathrm{P}(|X| \geq a) \leq E(|X|)$, et si $a > 0$, *on a* : $\mathrm{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$.

Variables aléatoires discrètes : *Variance et écart type*

Soit X une $v.a.d$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et a valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ et dont l'espérance $E(X^2)$ existe.

- On appelle variance de X la valeur, notée $Var(X)$, définie par :

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

- On appelle écart type de X, noté $\sigma(X)$, la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Variables aléatoires discrètes : *Variance et écart type*

Propriétés

Soit X une $v.a.d$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et a valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ et dont la variance $\mathrm{Var}(X)$ existe. Alors on a :

- *Formule de König*

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \sum_i x_i{}^2 P_X(x_i) - \big(E(X)\big)^2$$

- Si a *et* b sont deux constantes, alors : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
- X est constante (*presque sûrement*) si et seulement si $Var(X) = 0$.

Variables aléatoires discrètes : *variance*

Exemple :

On lance 3 pièces de monnaie. Par X on désigne le nombre de piles obtenus.

La loi de X est donnée par :

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2	3
$P(X = \boldsymbol{x_i})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Calculons $Var(X)$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Variables aléatoires discrètes : *quelques inégalités*

Soit X et Y deux $v.a.d$ admettant une variance, alors on a :

- Inégalité de *Tchebychev*

$$\forall a > 0 \qquad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

En particulier, si on prend $a = \alpha\sigma(X), on\ obtient$:

$$\forall \alpha > 0 \qquad P\big(|X - E(X)| \geq \alpha\sigma(X)\big) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\big(E(XY)\big)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Chap. II : Variables aléatoires discrètes

B. LOIS USUELLES

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *Loi Uniforme*

On est dans le contexte d'équiprobabilité sur un ensemble fini de valeur.
Soit X une $v.a.d$ qui prend ses valeurs dans un ensemble fini $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$; On dit que X suit une loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega)$, noté $X\sim\mathcal{U}_{\{x_1,x_2,\dots,x_n\}}$, si

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\quad P(X=x_i)=\frac{1}{n}=\frac{1}{card(X(\Omega))}$$

Exemple :
On lance un dé équilibré et on note $\boldsymbol{X}$ le résultat obtenu. On a :

$$X\sim\mathcal{U}_{\{1,\dots,6\}}$$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *Loi Uniforme*

Si X suit une loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$:
$X\sim\mathcal{U}_{\{x_1,x_2,\dots,x_n\}}$, alors on a :

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ \ \&\ Var(X)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2\right)-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

- En particulier :
  si $X(\Omega)=\{1,\dots,n\}$ et $\boldsymbol{X\sim\mathcal{U}}_{\{1,\dots,n\}}$, alors :
  $E(X)=\dfrac{n+1}{2}\quad;\quad \mathrm{Var}(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(p)$

On est dans le contexte d'une expérience aléatoire qui n'a que deux résultats possibles : le succès ou l'échec.
Cette expérience est dite épreuve de Bernoulli.

On dit qu'une $v.a.d$ $\boldsymbol{X}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\boldsymbol{p} \in]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}[$, noté $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{\mathcal{B}(p)}$, si $\boldsymbol{X}$ ne peut prendre que les deux valeurs 0 et 1 avec $P(X = 1) = p \; et \; P(X = 0) = 1 - p = q$

- $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(p)$

Exemples

- On lance une pièce de monnaie équilibrée. La variable X prend la valeur 1 si on obtient "face" et la valeur 0 si on obtient "Pile". La variable X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$: $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$
- On lance un dé équilibré et on cherche à obtenir la valeur 3 ou la valeur 6. La variable X prend la valeur 1 si on obtient « 3 ou 6 » et la valeur 0 sinon.
  X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$: $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{3})$

SMC4 2016-2017 Support de cours : Probabilité ; chap.2 Pr. : ELYASSA

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$

On considère une suite de n épreuves de Bernoulli répétées de manière indépendante avec même probabilité de succés $p \in]0,1[$.
Soit X la $v.a.d$ qui compte les succès obtenus, alors on a :

- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$,
- X suit une loi de binomiale de paramètres **n** *et* $\boldsymbol{p}$, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:
  - $\forall \boldsymbol{k} \in \{0, \dots, n\}$, $P_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  $$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$
  - $E(X) = np \quad et \quad Var(X) = np(1-p)$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi binomiale* $\mathcal{B}(n,p)$

Exemples

On jette 6 fois une pièce de monnaie équilibrée; Soit X la $v.a.d$ qui compte le "nombre de faces obtenues" ; $X \sim \mathcal{B}\left(6\,,\,\frac{1}{2}\right)$

- la probabilité d'obtenir exactement 2 faces est
$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$
- la probabilité d'avoir au moins 4 faces :
$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{11}{32}$$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$

On répète de façon indépendante des épreuves de Bernoulli, ayant même probabilité de succés $p \in]0,1[$, autant de fois qu'il faut pour obtenir le premier succès.
Soit X la variable aléatoire qui représente l'indice d'apparition du premier succès; (X égale au nombre de répétitions), alors on a :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- X suit une loi géométrique de paramètre $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{G}(p)$:
  - $P_X(k) = P(\{X = k\}) = p(1-p)^{k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$
  - $E(X) = \frac{1}{p}$ et $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$

- Remarque :
  la loi géométrique est la loi typique du temps d'attente avant apparition d'un certain événement.
- Exemple :
  On lance un dé équilibré plusieurs fois. Soit X l'indice de la première apparition de la valeur 5.
  Alors X suit une loi géométrique de paramètre $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$: $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{6})$

  $P(X = k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

  $E(X) = 6$, $Var(X) = 30$ et $\sigma(X) = 5{,}48$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$

Propriétes :

- Soit X une $v.a.d$ avec $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors :
  - $P(X > k) = (1-p)^k, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$;
  - X est une $v.a.d$ sans mémoire;
    - $P((X > n+k)/(X > k)) = P(X > n), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$;
    - $P((X = n+k)/(X > k)) = P(X = n), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$;
- Soit X et Y deux $v.a.d$ indépendantes telles que $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$. Soit $Z = \min(X, Y)$ alors on a :
  $Z = \min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p)$ *avec* $p = 1 - (1-p_1)(1-p_2)$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles : *loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le comptage, dans l'espace ou dans le temps, d'apparition d'événements rares qui ont une faible probabilité de réalisation.

- Nombre d'accidents intervenus sur une route par jour,
- Nombre de clients se présentant à un guichet par minute
- Nombre d'appels téléphoniques pendant un intervalle de temps T;
- Nombre de bactéries contenues dans une préparation
- Nombre de mutations dans une séquence génétique

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles :

loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\boldsymbol{\mathcal{P}(\lambda)}$, lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- la loi de X est donnée par : $P_X(k) = P(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$

Dans ce cas , on a : $E(X) = \lambda \quad et \quad Var(X) = \lambda$

Propriété :
Soit X et Y deux $v.a.d$ indépendantes telles que : $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$; $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$
alors : $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles :

loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0,7 appel à la minute. Si X représente le nombre d'appels par minute, alors $X \sim \mathcal{P}(0{,}7)$ Cherchons la probabilité pour que, entre 09h59 et 10h, le standard reçoive :

a. aucun appel → $P(X = 0) = e^{-0{,}7} = 0{,}496$

b. un seul appel → $P(X = 1) = \frac{0{,}7}{1!} e^{-0{,}7} = 0{,}348$

c. plus d'un appel → $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}156$

Variables aléatoires discrètes
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

- Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, devient très fastidieux. Il faut trouver une approximation qui facilite les calculs.
- Sous certaines conditions la loi de Poisson propose une bonne approximation de la loi binomiale.
- La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ dès lors que n est assez grand et p assez petit : $n \geq 50 \;\; et \;\; np \leq 5$

Variables aléatoires discrètes, lois usuelles :
loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$

Soit une expérience aléatoire dont le processus est constitué d'un tirage sans remise de n objets parmi N avec $p \in]0,1[$ est la proportion des objets ayant une propriété considérée comme « succès ».

Il s'agit donc de répéter n fois une épreuve de Bernoulli de manière non indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus, alors on a :

- $X(\Omega)=\{0,1,\dots,min(n,pN)\}$,
- X suit une loi hypergéométrique de paramètres $\mathrm{N},\mathrm{n},\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{H}(N,n,p)$:
  - $P_X(k)=P(\{X=k\})=\dfrac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $\forall\, k\in\{0,1,\dots,min(n,pN)\}$
  - $E(X)=np \quad et \quad Var(X)=np(1-p)\,\frac{N-n}{N-1}$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage