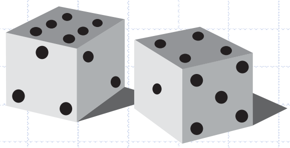
Statistiques

SCIENCES DE LA VIE

Chap. I

GÉNÉRALITÉS SUR LES PROBABILITÉS



SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Introduction

- La théorie des probabilités est une science qui a pour but l'étude des expériences aléatoires.
- Elle vise à construire des modèles mathématiques pour :
  - analyser des situations impliquant l'incertitude,
  - définir des mesures de cette incertitude.
- Il s'agit de définir des mesures, des probabilités, pour évaluer le degré d'incertitude des résultats d'une expérience dans une échelle allant de 0 à 1

Définitions :
Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience qui satisfait aux deux conditions suivantes :

- On ne peut pas prévoir avec certitude le résultat de l'expérience ;
- On peut décrire tous les résultats possibles avant l'expérience

Exemples :

- Lancer une pièce de monnaie un certains nombre de fois
- Choisir au hasard une carte dans un jeu de cartes
- Résultats du loto
- La durée de vie d'un élément radio actif

Définitions :
Ensemble fondamental

On appelle ensemble fondamental $\boldsymbol{\Omega}$*, l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent se produire dans une expérience aléatoire.*

Exemples :

- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Une pièce de monnaie est lancée trois fois de suite et on observe la suite de piles (P) ou de faces (F) obtenues.

Description explicite

$$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P),(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$$

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\ tel\ que\ \ \omega_i \in \{P, F\}\, , i = 1, 2, 3\}$$

Description implicite

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap Pr. : M. ELYASSA

Définitions :
Ensemble fondamental

Un ensemble fondamental peut être :

- Fini (discret) : s'il contient un nombre fini de résultats ;
- Infini dénombrable (discret) : s'il contient un nombre infini de résultats qui peuvent être énumérés ;
- Infini non-dénombrable (continu) : s'il contient un nombre infini de résultats qui ne peuvent être énumérés.

Les mesures de probabilité seront construites sur des familles de parties de l'ensemble fondamental appelées Tribu

Définitions :
Tribus

Soit Ω, l'ensemble fondamental correspondant à une expérience aléatoire. Une tribu sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω telle que :

1. Ω *est dans* $\mathcal{F}$
2. *si* $A \in \mathcal{F}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{F}$
3. *si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'événements dans* $\mathcal{F}$*, alors :*

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Définitions :
Tribus

Exemples de tribus :

- $\mathcal{F} = \{\emptyset , \Omega\}$ *est la tribu grossière*
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *l'ensemble de toutes les parties de* Ω*, c'est la plus grande tribu*
- *Si* $A \subset \Omega$ *alors* $\mathcal{F} = \{\emptyset , A, A^c , \Omega\}$ est la plus petite tribu contenant A
- *Dans le cas* $\Omega = \mathbb{R}$,
  on prend $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la plus petite tribu engendrée par les intervalles ouverts; *c'est la tribu de Borel*

Définitions :
Tribus

Remarques :

1. Si $\mathcal{F}$ est une tribu alors on a :
   a. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
   b. $si\ (A_n)_{n\geq 1}\ est\ une\ suite\ d'événements\ dans\ \mathcal{F}, alors$
   $$\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$$
2. Si Ω est un ensemble dénombrable, on choisit naturellement la tribu discrète $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Définitions :
Espace probabilisable

Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur l'ensemble fondamental Ω, alors le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé ***espace probabilisable.***

Exemple :

Expérience aléatoire : lancer une pièce de monnaie .
Alors $\Omega = \{P, F\}$, on choisit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \Omega\}$.
Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace sur lequel il est possible de définir une mesure de probabilité pour cette expérience : c'est un espace probabilisable

Définitions :
Événements

On appelle événement tout élément d'une tribu $\mathcal{F}$ sur un ensemble fondamental (Ω) associé à une expérience aléatoire.

- Les événements sont notés par des lettres majuscules (A, B, C,…) et peuvent être décrit d'une manière implicite ou explicite.
- On dit qu'un événement A se réalise si et seulement si l'expérience aléatoire donne un des résultats constituant cet événement.

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Définitions :
Événements

Exemple :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et on observe la suite de piles (P) ou de faces (F) obtenues.

$$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P),(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$$

- On considère l'événement A ="obtenir au moins 2 faces";

  $A = \{(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$

- l'événement A se réalisera lorsque on obtient l'une des quatre configurations $(P,F,F)\ ou\ (F,P,F)\ ou\ (F,F,P)\ ou\ (F,F,F)$

Définitions :
Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{F})$:

- Réunion (disjonction) : A ou B, $\boldsymbol{A \cup B}$; c'est l'événement qui se réalise lorsque A se réalise ou B se réalise ou les deux se réalisent.
- Intersection (conjonction) : A et B , $\boldsymbol{A \cap B}$ c'est l'événement qui se réalise si et seulement si A et B se réalise en même temps.
- Négation (événement contraire) : $nonA, \bar{A}$: c'est l'événement qui se réalise si seulement si A ne se réalise pas.

Définitions :
Relations entre les événements

Soient A et B deux événements de $(\Omega, \mathcal{F})$:

- On dit que l'événement *A implique B* si la réalisation de A entraîne la réalisation de B lors de l'expérience aléatoire, c'est-à-dire que tous les résultats de A font partie de B. Formellement on écrit $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.
- On dit que *A et B sont équivalents* si A et B se réalisent simultanément. Formellement on écrit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.
- On dit que les événements A et B sont mutuellement exclusifs ou incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. Formellement on écrit $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$.

Définitions :
Catégories d'événements

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

- Evénement élémentaire (simple) : c'est lorsque l'événement se réduit à un seul résultat ;
- Événement composé : tout événement correspondant à plus d'un résultat ;
- Événement impossible : que l'on désigne par Ø, c'est l'événement qui ne se réalise jamais ;
- Événement certain : que l'on désigne par Ω, c'est l'événement qui se réalise toujours.

Définitions :
Catégories d'événements

Exemple :

On lance 3 fois une pièce de monnaie, soit les événements :

- A : n'obtenir aucune Face ; $A=\{(P,P,P)\}$ A est un événement simple
- B : obtenir exactement une seule Face ; $B=\{(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)\}$
- C : obtenir au plus une Face ; $C=\{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)\}$

Nous avons : A *implique* C ; $A \subset C$

A *et* B *sont incompatibles* ; $A \cap B = \emptyset$

Définitions :
Probabilité

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application P de $\mathcal{F}$ dans l'intervalle $[0,1]$ qui vérifie les axiomes suivants :

1. $P(\Omega) = 1$
2. *si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'événements dans* $\mathcal{F}$ *deux à deux disjoints,* $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, *alors*

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé un espace de probabilité.

Probabilités :
Propriétés et règles de calcul

Soient A et B deux événements d'un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors on a :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $Si\ A \subset B\ alors\ P(A) \leq P(B)$
4. $P(B \cap A) = P(B) - P(B \cap \overline{A})$; $P(B \cap A) = P(A) - P(\overline{B} \cap A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemples de mesure de probabilité :
Probabilité sur un ensemble dénombrable

Soit Ω un ensemble dénombrable, $\Omega = \{ \omega_i ; i \in I\}$ où I est un ensemble dénombrable, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$;
Une mesure de probabilité P sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est entièrement définie et caractérisée par :

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0 \quad pour\ tout\ i \in I\ et\ \sum_{i \in I} p_i = 1$$

Dans ce cas, pour tout évènement $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\{i\ ;\omega_i \in A\}} p_i$$

Exemples de mesure de probabilité :
Equiprobabilité sur un ensemble fini

- On est dans le contexte d'un ensemble fondamental Ω contenant un nombre fini de valeurs et de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
  L'hypothèse d'équiprobabilité signifie que à chaque élément $\omega \in \Omega$, a la même probabilité de se réaliser :
  $$P(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} \; ; \forall \omega \in \Omega \quad ;$$
- Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement E est donnée par :
  $$P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} \; ; \forall E \subset \Omega \quad ;$$

Exemples de mesure de probabilité :
Equiprobabilité sur un ensemble fini

Application :

on lance un dé équilibré et on note la valeur du point obtenu. Puisque le dé est équilibré toutes les faces ont la même chance de sortir : nous sommes donc sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $P(A) = \frac{Card(A)}{6}$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

Soit B l'événement « obtenir un nombre impair ». Alors, on a :

$$B = \{1, 3, 5\} \text{ et } P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

Eléments de calcul combinatoire

- ✓ L'analyse combinatoire est utilisé pour étudier et dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.
- ✓ Elle étudie comment compter des objets.
- ✓ L'analyse combinatoire permet de répondre à des questions telles que :
  - On doit choisir deux étudiants parmi 24. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?
  - Combien de codes différents de 4 chiffres peut-on former ?
- ✓ La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

Principe de multiplication

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession d'étapes ou opérations

- ✓ *Principe de multiplication*
  Si $\boldsymbol{p}$ étapes doivent être effectuées lors d'une expérience, et que la k-ème étape peut entraîner $\boldsymbol{n_k}$ choix, alors le nombre de résultats possibles de l'expérience est donné par :

$$\prod_{k=1}^{p} n_k = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

Cela correspond à la présentation de l'expérience sous forme d'arbre de choix

Arrangements
Sans répétition

Un arrangement de longueur p d'un ensemble E de n éléments est une *suite ordonnée* de p éléments *distincts* de E.

✓ le nombre d'arrangements sans répétition de p objets pris parmi $\boldsymbol{n}$ est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1); \quad 1 \leq p \leq n$

Exemples :

- Le nombre de tiercés dans l'ordre possibles pour un départ de 15 chevaux est : $A_{15}^3 = \dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$

-Le nombre de façons de placer p objets distincts dans n cases, chaque case pouvant contenir au plus un objet, est A_n^p

Arrangements
Avec répétition

Un *arrangement avec répétition* de longueur p d'un ensemble E de n éléments est une *suite ordonnée* de p éléments de E.

✓ le nombre d'arrangements avec répétition de p objets pris parmi $\boldsymbol{n}$ est : n^p

✓ Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est : n^p

Exemple : combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ? $9^8 = 43\ 046\ 721$

Permutations
Sans répétition

Une permutation dans un ensemble E de n éléments est une *suite ordonnée* de n éléments *distincts* de E.

✓ le nombre permutations de n objets est : $P_n = n!$;

Exemples :

- considérons une liste de 8 étudiants. Le nombre de manières d'ordonner cette liste est : $8! = 8 \times 7 \times \cdots \times 3 \times 2 = 40320$
- 4 livres de math et 5 de physique doivent être rangés sur une même étagère, et doivent rester groupes par matière. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

$$2 \times 4! \times 5! = 2 \times 24 \times 120 = 5760$$

Permutations
avec répétition

✓ Le nombre de permutations de n éléments, répartis dans k classes $C_1, C_2, \cdots, C_k$ telles que $card(C_i) = n_i$ et que les éléments d'une même classe sont indiscernables, est :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

Exemple : considérons le mot « CELLULE ». Le nombre de mots possibles (anagramme) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est : $\frac{7!}{1! \times 2! \times 3! \times 1!} = 420$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Combinaisons

Sans répétition

Une *combinaison* de longueur p d'un ensemble E de n éléments est une *sous ensemble* de p éléments de E.

✓ le nombre de combinaisons de p objets pris parmi $\boldsymbol{n}$ est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad 1 \le p \le n \qquad \textit{notée aussi} \binom{n}{p}$$

Exemple : Le nombre de choix de 5 étudiants parmi 18 est égal à

$$C_{18}^5 = \frac{18!}{5!13!} = 8568$$

Combinaisons

avec remise (répétition)

Une *combinaison avec remise* de longueur p d'un ensemble E de n éléments est une *collection* de p éléments de E *dans la quelle les éléments peuvent être répétés.*

✓ le nombre de combinaisons avec remise de p objets pris parmi $\boldsymbol{n}$ est :

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}; \quad 1 \le p \le n$$

Exemple : le nombre de choix de 3 lettres à partir d'un alphabet à 27 lettres avec remise : $C_{29}^3 = \frac{29!}{3!26!} = 3654$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Propriétés des combinaisons

i. $C_n^p = C_n^{n-p}$, $0 \le p \le n$; $\left(\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \right)$

ii. *Formule de Pascal (triangle de Pascal):*

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}, \; 0 \le p \le n \; ; \quad \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \right).$$

iii. $$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Coefficients multinomiaux

Le but est de découper un ensemble de n éléments en k sous-ensembles de tailles $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, et de déterminer le nombre de découpages possibles.

- ✓ le nombre de partitions (découpages) possibles est le coefficient multinomial :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Exemple : On répartit 23 personnes en 3 groupes de 13, 6 et 4 individus.

Le nombre de groupes possibles est : $\binom{23}{13,\ 6,\ 4} = \frac{23!}{13!6!4!}$

Exemples de mesure de probabilité :
Equiprobabilité sur un ensemble fini

Exemple : une urne contient 10 boules blanches et 7 boules noires. On tire deux boules de l'urne. Calculons la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

- Ω est l'ensemble de toutes les parties de deux éléments parmi les 17 boules de l'urne ;

$$card(\Omega) = C_{17}^{2} = \frac{17!}{2!15!}$$

- Soit B l'événement « obtenir deux boules blanches»;

$$card(B) = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!8!}$$

- $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{10!\times 15!}{17!\times 8!} = \frac{10\times 9}{17\times 16} = 0{,}33$

Exemples de mesure de probabilité :
Equiprobabilité sur un ensemble fini

Exemple : On dispose d'un lot de 100 ampoules dont 10 sont défectueuses. On choisit au hasard un échantillon de 5 ampoules. Calculons la probabilité d'avoir dans cet échantillon deux ampoules défectueuses :

- Ω est l'ensemble de toutes les parties de 5 éléments parmi les 100 ampoules

$$card(\Omega) = C_{100}^{5} = \frac{100!}{5!95!}$$

- Soit A l'événement « obtenir deux ampoules défectueuses»;

$$card(A) = C_{10}^{2} \times C_{90}^{3} = \frac{10!}{2!8!} \times \frac{90!}{3!87!}$$

- $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} == 0{,}07$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Définitions :
Événements indépendants

- *Soit (Ω ,$\mathcal{F}$, P) est un espace de probabilité, soit A et B deux événements de $\mathcal{F}$; on dit que A et B sont indépendants si seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- *On dit que les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants deux à deux si et seulement si*

$$\forall i \neq j\,,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$$

- *On dit que les évènements $A_1, A_2, \dots$, An sont mutuellement indépendants si et seulement si pour toute sous famille $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ avec* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, on a :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \cdots \times P(A_{i_k})$$

Définitions :
Événements indépendants

Exemple :

on lance un dé non pipé et on note la valeur du point obtenu. On considère les événements :

A: "*obtenir un nombre impair*" et B :"*obtenir un multiple de trois*", alors on a : A = {1, 3, 5} , B = {3, 6} et A ∩ B={3}

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ ;\ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ \text{et}\ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

A et B sont indépendants car *P(A∩B) = P(A)×P(B)*

Proposition :

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les paires d´évènements $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Définitions :

Probabilité conditionnelle

on lance un dé non pipé et on note la valeur du point obtenu .
Soient A l'événement "obtenir un nombre premier de " et
B l'événement "obtenir un nombre pair" et alors on a :

$A = \{2,3,5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $A \cap B=\{2\}$, $P(B) = \frac{3}{6}$; $P(A) = \frac{3}{6}$

Si on sait que B est réalisé quelle est la probabilité d'obtenir A ?

$$P(\text{"}obtenir\ A\ sachant\ B\text{"}) = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définitions :

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité; soit A est un événement de $\mathcal{F}$ et soit B un événement de $\mathcal{F}$ de probabilité non nulle.
La probabilité conditionnelle de A sachant B, (*la probabilité de réalisation de A lorsque B est réalisé*), notée P(A/B), est définie par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{où } P(B) > 0$$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Probabilité conditionnelle

Exemple

Dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés, quelle est la probabilité d'avoir une somme égale à 8 sachant que les deux dés indiquent le même résultat?

- En effet, soit l'événement A= "Obtenir une somme égale à 8" et B =" les deux dés indiquent le même résultat "

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3),..., (6,6)\}$$ 36 valeurs

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$ 5 valeurs

$$B = \{(1,1), (2,2)., (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$ 6 valeurs

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(1/36)}{(6/36)} = \frac{1}{6}$$

Probabilité conditionnelle et indépendance

Nous avons vue que deux événements A et B sont dit indépendants en probabilité si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

donc dans le cas d'indépendance on a :

$$P(A/B) = P(A) \quad et \quad P(B/A) = P(B)$$

L'indépendance signifie que la probabilité de réalisation de l'événement A n'est pas modifiée par la réalisation de l'événement B et inversement.

Probabilité conditionnelle
formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $A_1, \dots, A_n$, n événements de $\mathcal{F}$ tels que *n>1 et* $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) \dots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

Remarque :

lorsque n=2, on retrouve la définition des probabilités conditionnelles : $\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 / A_1)}$

Probabilité conditionnelle
formule des probabilités composées

Exemple :

Soit l'expérience qui consiste à choisir au hasard, l'une après l'autre, sans remise, deux ampoules électriques dans une boîte contenant 10 ampoules dont 3 sont défectueuses et 7 sont bonnes.

Quelle est la probabilité de « choisir deux ampoules défectueuses dans les deux tirages » ?

Soit les événements :

- D_1 «l'ampoule choisie au 1er tirage est défectueuse».
- D_2 «l'ampoule choisie au 2ème tirage est défectueuse».

Alors la probabilité de tirer deux ampoules défectueuses est :

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2/D_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

Probabilité conditionnelle
formule des probabilités composées

Exemple :

Quelle est la probabilité de tirer successivement trois as d'un jeux ordinaire de 52 cartes, si on ne remet pas, à chaque fois, la carte tirée.

Soit les événements :

- A : "la première carte tirée est un as"
- B : "la deuxième carte tirée est un as"
- C : "la troisième carte tirée est un as«

Alors la probabilité de tirer 3 as est :

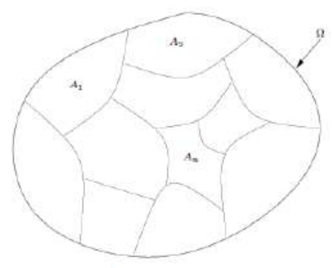
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

Probabilité conditionnelle
formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $A_1, \dots, A_n$, des événements de $\mathcal{F}$ formant une partition de Ω :

- *deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall\, i, j$*
- $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega$

et soit E un événement quelconque de $\mathcal{F}$,
alors on a :



Partition $(A_1, \dots, A_n)$ de Ω.

$$\boldsymbol{P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E / A_i)P(A_i)}$$

En particulier :

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/\bar{A})P(\bar{A}) \,, \forall A \in \mathcal{F}$$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

Probabilité Conditionnelle
formule des probabilités totales

Exemple :

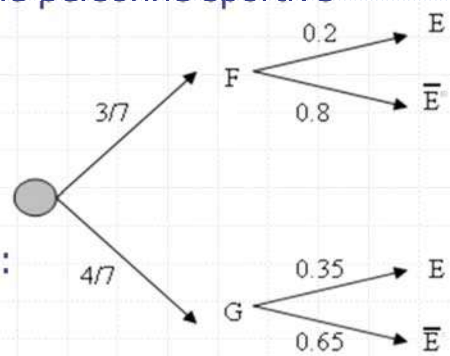
Dans une faculté, il y a 3 filles pour 4 garçons. Il est connu que 35% des garçons sont des sportifs contre seulement 20% des filles. Quelle est la probabilité de choisir au hasard dans cette faculté une personne sportive

Solution :

Soit E : "la personne choisie est sportive" ,

Soit $\boldsymbol{F}$: "la personne choisie est une fille " ,

$\boldsymbol{G} = \overline{\boldsymbol{F}}$: "la personne choisie est un garçon".



On a, en utilisant la formule des probabilité totales :

$$P(E) = P(E\,/\,F)P(F) + P(E/\bar{F})P(\bar{F})$$
$$= \frac{20}{100} \times \frac{3}{7} + \frac{35}{100} \times \frac{4}{7} = 0{,}286$$

Probabilité conditionnelle
Formule des probabilités totales

Exemple : Une boîte contient trois pièces de monnaie. L'une est régulière, une autre a deux faces et la dernière est faussée de façon à ce qu'elle tombe 2 fois plus souvent sur le côté face que sur le côté pile. On choisit au hasard une pièce dans la boite puis on la lance.

Quelle est la probabilité d'obtenir Face ?

Solution :

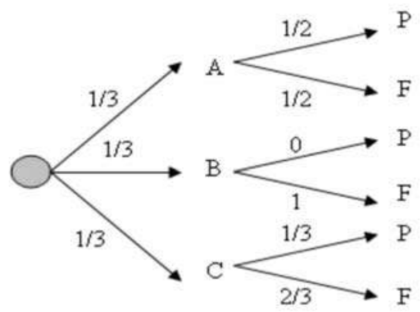
A : la pièce tirée est régulière

B : la pièce tirée est à double faces

C : la pièce tirée est faussée

F : obtenir le coté face

P : obtenir le coté pile



$$P(F) = P(A)P(F/A) + P(B)P(F/B) + P(C)P(F/C)$$
$$= (1/3)\,(1/2) + (1/3)(1) + (1/3)(2/3) = 0{,}722$$

SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

probabilité conditionnelle
formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et* $\boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A_n}$ *, n événements de* $\mathcal{F}$ *formant une partition de* $\boldsymbol{\Omega}$ *, alors pour tout événement* $\boldsymbol{E}$ *et tout indice* $\boldsymbol{j}$*, on a :*

$$\boldsymbol{P(A_j/E) = \frac{P(E/A_j)P(A_j)}{P(E)} = \frac{P(E/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E\,/\,A_i\,)P(A_i)}}$$

En particulier :

en prenant une partition de type $(\mathbf{A}\,,\bar{\mathbf{A}})$ cette formule devient :

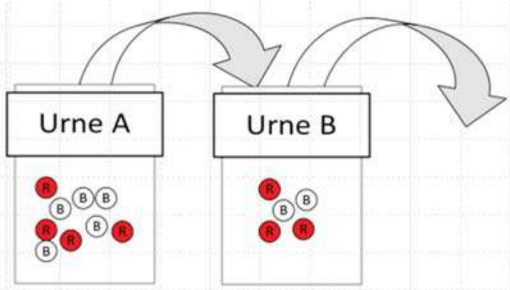
$$P(A\,/\,E) = \frac{P(E/A)P(A)}{P(E)} = \frac{P(E/A)P(A)}{P(E/A)P(A)+P(E/\bar{A})P(\bar{A})}$$

probabilité conditionnelle
formule de Bayes

Exemple

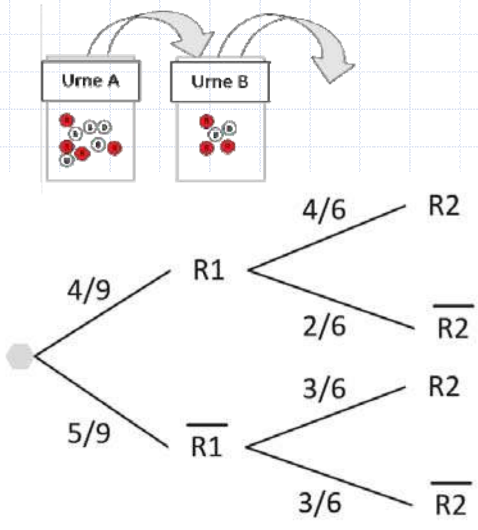
On dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient 4 boules rouges et 5 boules blanches et l'urne B contient 2 boules blanches et 3 boules rouges. On tire au hasard et à l'aveuglette une boule de l'urne A et on la place dans l'urne B. Puis, on choisit au hasard de l'urne B une boule.

Sachant que la deuxième boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la boule transférée de l'urne A vers l'urne B, ait été rouge ?



SMC4: 2016-2017 Support de cours : Probabilité , Chap. i Pr. : M. ELYASSA

probabilité conditionnelle
formule de Bayes



Solution :

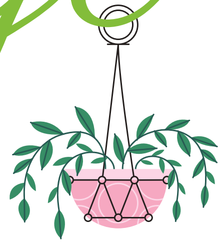
Soit les évènements :

- $R1$: "*La première boule tirée est rouge*"
- $\overline{R1}$: "*La première boule tirée n'est pas rouge*"
- $R2$: "*La seconde boule tirée est rouge*"
- $\overline{R2}$: "*La seconde boule tirée n'est pas rouge*"

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R1)P(R2/R1) + P(\overline{R1})P(R2/\overline{R1})}$$

$$= \frac{(4/9)(4/6)}{(4/9)(4/6) + (5/9)(3/6)} = 0,516$$

Bon courage



LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage