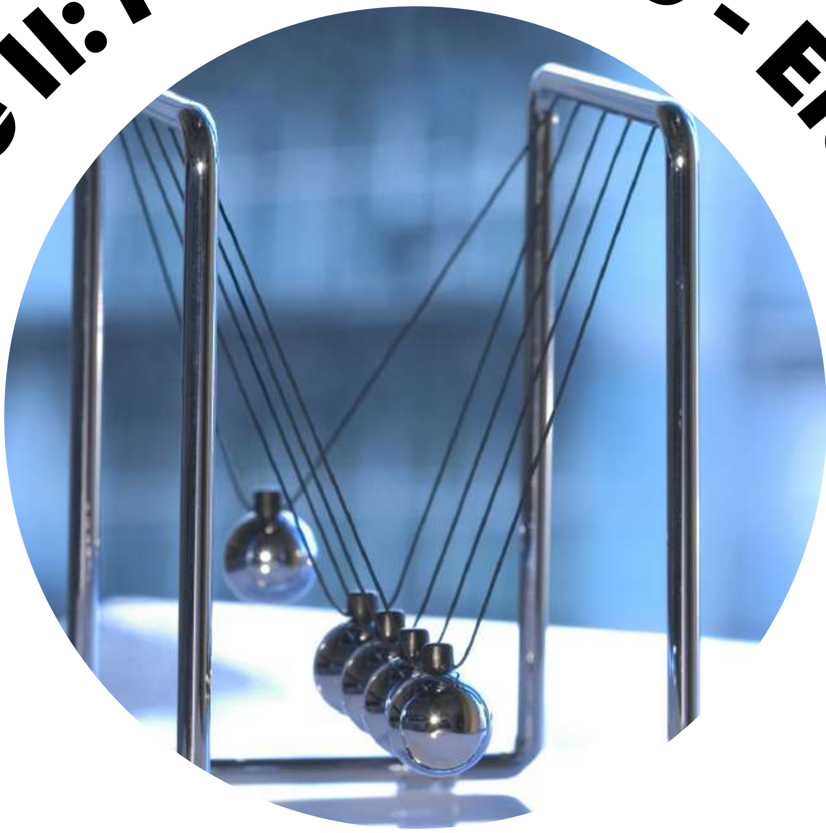
Physique II: Mécanique - Electricité



SCIENCES DE LA
VIE ET DE LA TERRE

UNIVERSITÉ ABDEL MALEK ESSAADI
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2020-2021

Prof N. ABOURICHA

Filière: SVI

Semestre 2

Mécanique du Point Matériel

Sommaire

Chapitre I

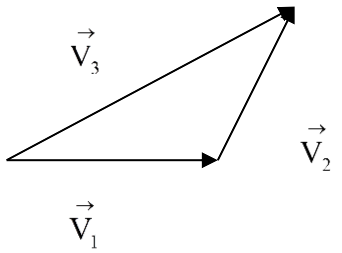
Compléments mathématiques

I – Calcul vectoriel

I-1 Addition vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de l'espace vectoriel (E), la somme de ces deux vecteurs est le vecteur $\vec{V}_3$ tel que :

$$\boxed{\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2}$$



<u>Propriétés :</u>

- Commutativité :

$$\vec{V}_2 + \vec{V}_1 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

L'addition vectorielle est commutative

Alors que la soustraction vectorielle n'est pas commutative

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

- Associativité :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

L'addition vectorielle est associative

I-2 Multiplication par un scalaire

Le produit d'un scalaire λ par un vecteur $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{V'}$ colinéaire à $\vec{V}$ dont le sens dépend de λ.

$$\boxed{\vec{V'} = \lambda \vec{V}}$$

- si $\lambda > 0$; $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont de même sens
- si $\lambda < 0$; $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont de sens contraire

Le module de $\vec{V'}$ s'écrit : $\| \vec{V'} \| = |\lambda| . \| \vec{V} \|$

<u>Propriétés :</u>

- Associativité :

$$\lambda_1 (\lambda_2 \vec{V}) = (\lambda_1 . \lambda_2) \vec{V}$$

- Distributivité :

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{V} = \lambda_1 \vec{V} + \lambda_2 \vec{V}$$

$$\lambda . (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \lambda . \vec{V_1} + \lambda . \vec{V_2}$$

I-3 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_1}$, faisant un angle θ entre eux, est le scalaire λ définit par :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda = \vec{V_2} . \vec{V_1} = \| \vec{V_2} \| . \| \vec{V_1} \| . \mathrm{Cos}\theta}}$$

<u>Propriétés :</u>

- Commutativité :

$$\vec{V_2} . \vec{V_1} = \vec{V_1} . \vec{V_2}$$

Le produit scalaire est commutatif.

- Associativité :

$$(\lambda \vec{V}_1).\vec{V}_2 = \vec{V}_1.(\lambda \vec{V}_2)$$

Le produit scalaire est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire λ réel.

- Distributivité :

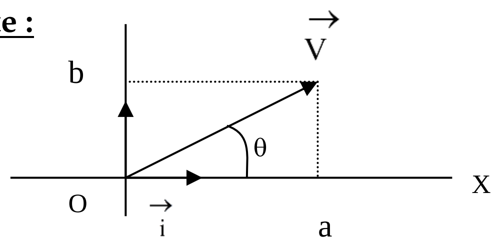
$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\vec{V}_3)$$

<u>**Cas particuliers :**</u>

- ✓ Si $\lambda=0 \Rightarrow \text{Cos}\,\theta = 0$ alors $\theta=90°$; $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1$ sont perpendiculaires ou orthogonaux.
- ✓ Si $\lambda=1$; $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Rightarrow \text{Cos}\theta=1$ alors $\theta=0$, on a alors $\vec{V}_1.\vec{V}_1 = ||\vec{V}_1||^2 = 1$

  donc $||\vec{V}|| = 1$; dans ce cas le vecteur $\vec{V}$ est dit **unitaire**.

<u>**Projections d'un vecteur sur un axe :**</u>



$$\boxed{a = \vec{V}.\vec{i} = ||\vec{V}||.||\vec{i}||\,\text{Cos}\theta}$$

a, est la projection du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe OX.

L'équation devient lorsque $||\vec{i}|| = 1$:

$$\boxed{a = ||\vec{V}||\,\text{Cos}\theta}$$

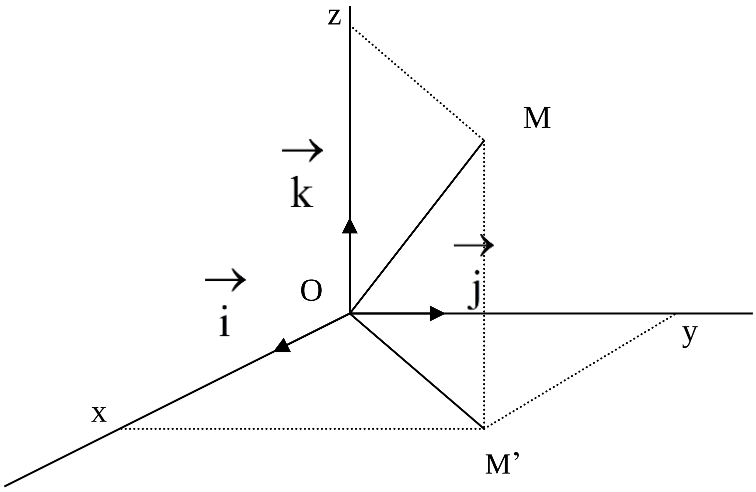
Cosθ est appelé cosinus directeur du vecteur $\vec{V}$ par rapport à l'axe OX de vecteur directeur $\vec{i}$.

I-4 Repère orthonormé direct

Soit O, M et M' trois points de l'espace affine (*E*) et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires de l'espace vectoriel (E) associé à (*E*). R (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est dit repère orthonormé direct si :

- Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont perpendiculaires deux à deux.
- Les modules des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont égaux à l'unité.

Le repère est direct quand le sens de rotation de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ est contraire à celui des aiguilles d'une montre.



Le vecteur $\vec{OM}$ est définit par :

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

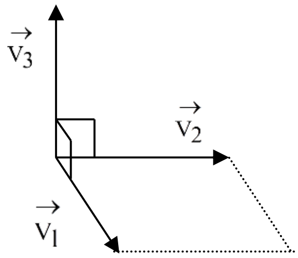
On démontre que :

$$\|\vec{OM}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

I-5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteur $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de l'espace vectoriel (E), faisant un angle θ entre eux, est un vecteur $\vec{V_3}$ noté $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ tel que :

$$\boxed{\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}}$$



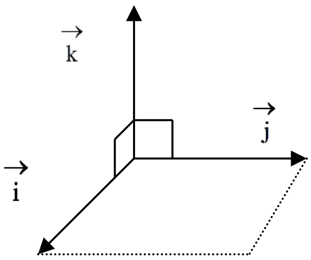
Le module de $\vec{V_3}$ s'écrit :

$$\|\vec{V_3}\| = \|\vec{V_1}\| . \|\vec{V_2}| \operatorname{Sin}\theta$$

Le vecteur $\vec{V_3}$ est perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_1}$ tel que le trièdre $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3})$ est direct.

- Cas d'un repère orthonormé :

$$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j} \;;\; \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j} \;;\; \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$



<u>Propriétés :</u>

- Commutativité

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V2} \wedge \vec{V1}$$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif

- Associativité

$$\lambda(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = \lambda \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{V_1} \wedge \lambda \vec{V_2}$$

Le produit vectoriel est associatif par rapport à la multiplication.

- Distributivité

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V3}$$

Le produit vectoriel est distributif par rapport à la multiplication.

<u>Composantes du produit vectoriel :</u>

$\vec{V_1} = \mathbf{x_1}\,\vec{i} + \mathbf{y_1}\,\vec{j} + \mathbf{z_1}\,\vec{k}$

$\vec{V_2} = \mathbf{x_2}\,\vec{i} + \mathbf{y_2}\,\vec{j} + \mathbf{z_2}\,\vec{k}$

$\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (\mathbf{x_1}\,\vec{i} + \mathbf{y_1}\,\vec{j} + \mathbf{z_1}\,\vec{k}) \wedge (\mathbf{x_2}\,\vec{i} + \mathbf{y_2}\,\vec{j} + \mathbf{z_2}\,\vec{k})$

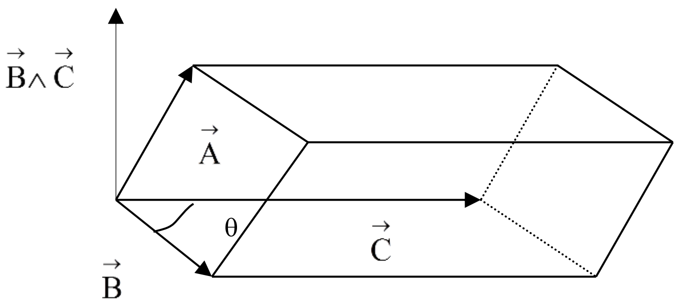
$\vec{V_3} = (\mathbf{y_1\, z_2 - y_2\, z_1})\,\vec{i} + (\mathbf{x_2\, z_1 - x_1\, z_2})\,\vec{j} + (\mathbf{x_1\, y_2 - x_2\, y_1})\,\vec{j}$

Les composantes peuvent obtenues en utilisant le déterminant :

$$\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

I-6 Produit mixte



Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est le scalaire noté $\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}$. La valeur absolue du produit mixte représente le volume V du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

$$\boxed{\mathbf{V} = |\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}|}$$

- Calcul du scalaire V

Soient les vecteurs $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$; la valeur de V est obtenue de la manière suivante :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Propriétés :

- Le produit mixte des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ est noté : $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$
- La valeur du produit mixte ne change pas de signe si on permute les trois vecteurs, c'est à dire :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$$

- La valeur du produit mixte change de signe si l'on permute deux vecteurs, c'est à dire :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C})$$
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = -(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B})$$
$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = -(\vec{C}, \vec{B}, \vec{A})$$

- Le produit mixte est nul quand deux vecteurs sont colinéaires.

I-7 Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ est le vecteur noté :

$$\boxed{\vec{D} = \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}}$$

I-8 Dérivé d'une fonction à plusieurs variables

Soit une fonction f qui dépend de trois variables x, y et z : $F = f(x, y, z)$

La dérivée de F par rapport à x, en considérant y et z constants, est appelée dérivée partielle de F par rapport à x. Elle se note :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

Les dérivées partielles de F par rapport à y et z sont notées

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y};\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

La dérivée totale de F regroupe les dérivées partielles de F par rapport à x, y et z. elle se note :

$$\boxed{dF=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz}$$

I-9 Dérivé temporelle d'une fonction vectorielle

Soit la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ dépendant du temps t. La dérivé de la fonction $\vec{V}(t)$ par rapport à t est la fonction $\vec{V}'(t)$ définit par :

$$\boxed{\vec{V}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}}$$

<u>Propriétés :</u>

- Si la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ est constante alors $\frac{d\vec{V}}{dt}=0$.
- La dérivée d'une somme vectorielle est égale à la somme des dérivées de chacune des fonctions.

$$\frac{d(\vec{V}_1+\vec{V}_2)}{dt}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}+\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

- La dérivée du produit scalaire

$$\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2+\vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

- La dérivée du produit vectoriel

$$\frac{d(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)}{dt}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}\Lambda\vec{V}_2+\vec{V}_1\Lambda\frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

I-10 Formule de dérivation vectorielle

Soit le repère R_1 en mouvement par rapport à un repère R, on définit la dérivée d'un vecteur $\vec{V}$ (t) dans un repère R par la relation suivante :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R)\Lambda\vec{V}}$$

$\vec{\Omega}$ (R_1/R) est le vecteur rotation instantané du repère R_1 par rapport à R.

<u>Propriétés :</u>

- Si le vecteur $\vec{V}$ (t) est lié au repère R_1 la dérivée $\left.\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right|_{R_1} = 0$ et la relation de dérivation se réduit à :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R} = \vec{\Omega}(R_1/R)\Lambda\vec{V}}$$

➢ Dérivée d'un vecteur multiplié par u

$$\frac{d\lambda(t)\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{V} + \lambda(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

➢ Dérivée d'une fonction vectorielle composée

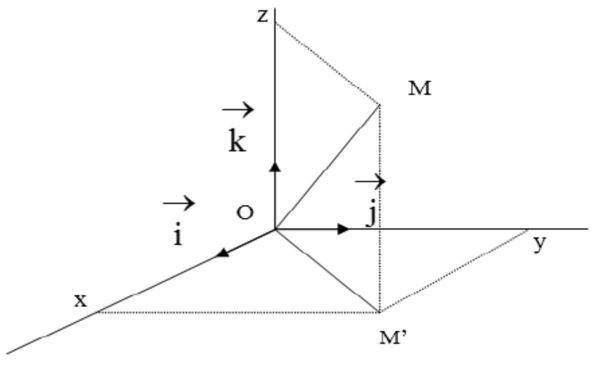
$$\frac{d\vec{V}(\theta(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

II – Systèmes de coordonnées

II.1 Coordonnées cartésiennes

R (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère orthonormé direct

Vecteur position :



$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$$

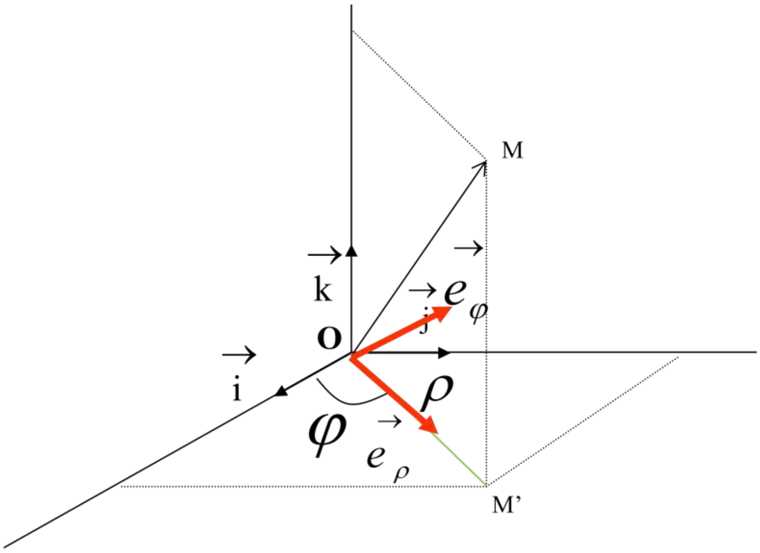
$$\vec{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Vecteur déplacement élémentaire :

$$\boxed{d\vec{OM} = dx(t)\,\vec{i} + dy(t)\,\vec{j} + dz(t)\,\vec{k}}$$

II.2 Coordonnées cylindriques

($\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$, $\overrightarrow{e_z}$) est une base cylindrique



Vecteur position :

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\frac{d\,\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j} = -\vec{e}_\rho$$

$$\frac{d\,\vec{e}_\rho}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} = \vec{e}_\varphi$$

Vecteur déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

Chapitre II

Cinématique du point matériel

La Cinématique c'est l'étude du ***mouvement*** d'un corps en fonction du ***temps***, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier. Ce mouvement s'effectue le long d'une ***trajectoire***.

I Définitions

I.1 Mouvement

Modification de la **position** d'un corps pendant un intervalle de temps. On attribue à la position du corps une ou plusieurs valeurs numériques (**coordonnées**) qui situent le corps en fonction du temps dans un **référentiel**.

- ✓ Mouvement rectiligne uniforme **:** la trajectoire se trouve sur une droite, la vitesse est constante en direction et en norme. Le vecteur vitesse est *constant*, en *direction* et en *norme*.
- ✓ Mouvement rectiligne uniformément accéléré **:** la trajectoire se trouve sur une droite, la direction du déplacement est constante, mais la norme de la vitesse varie au cours du temps (augment ou diminue). *L'accélération* (ou la décélération) est constante. Le vecteur vitesse est *constant* en *direction*, mais sa *norme varie*.
- ✓ **Mouvement rectiligne varié :** l'accélération n'est pas constante dans le temps.
- ✓ Mouvement circulaire uniforme **:** la trajectoire se trouve sur un cercle ou un arc de courbe. La *norme* du vecteur vitesse est *constante*, mais sa *direction change*.
- ✓ Mouvement curviligne **:** la trajectoire se trouve sur une courbe. La *norme* du vecteur vitesse et sa *direction* changent au cours du temps.

I.2 Trajectoire

L'ensemble des positions successives du corps dans l'espace. La trajectoire se trouve sur une courbe (droite, arc, …)

I.3 Référentiels

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent. La notion de mouvement est relative, il est nécessaire de l'étudier par rapport à un référentiel. La cinématique classique n'envisage que les mouvements où la vitesse est faible devant celle de la lumière.

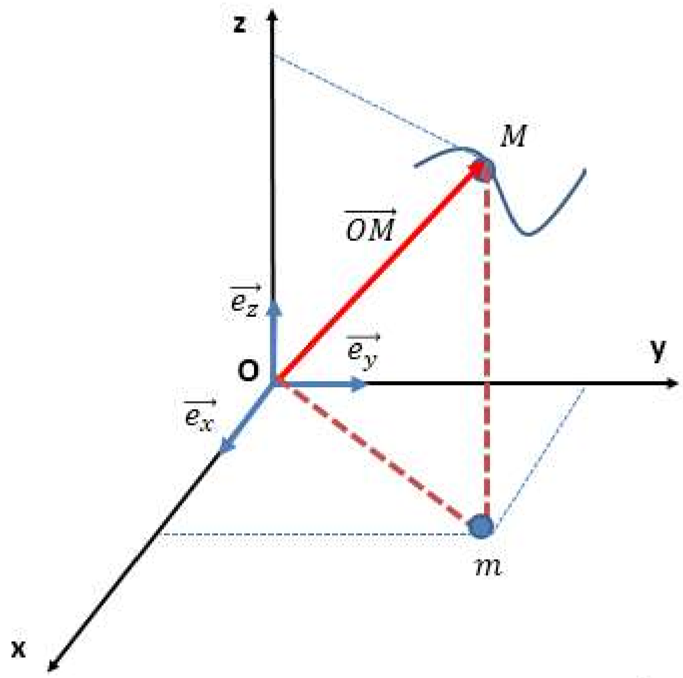
Pour étudier le mouvement d'un point matériel, nous disposons d'un repère d'espace galiléen $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et d'un repère temps $T(\Omega, \vec{e})$, l'ensemble de ces deux repère forme un référentiel.

II Vitesses et accélérations

II.1 En coordonnées cartésiennes (x , y , z)

Soit $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ un repère d'espace et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position définit dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ par ses composantes x, y et z tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$



x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M.

- On définit le **vecteur vitesse** associé au point M par rapport au repère R par le vecteur $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)$ tel que :

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x} + x\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{e_y} + y\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z} + z\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}$$

avec : $\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_{R} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont fixes dans R

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z} = V_x\overrightarrow{e_x} + V_y\overrightarrow{e_y} + V_z\overrightarrow{e_z}$$

avec V_x, V_y et V_z sont les composantes du vecteur vitesse du point M par rapport au repère R noté $\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$
Le module du vecteur vitesse est donné par :

$$\left\|\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)\right\| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2} \quad \text{en (m/s)}$$

- Le **vecteur accélération** $\vec{\gamma}$ est définit par la relation :

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{R} = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{R}\overrightarrow{e_x} + \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{R}\overrightarrow{e_y} + \left.\frac{d^2z}{dt^2}\right|_{R}\overrightarrow{e_z}$$

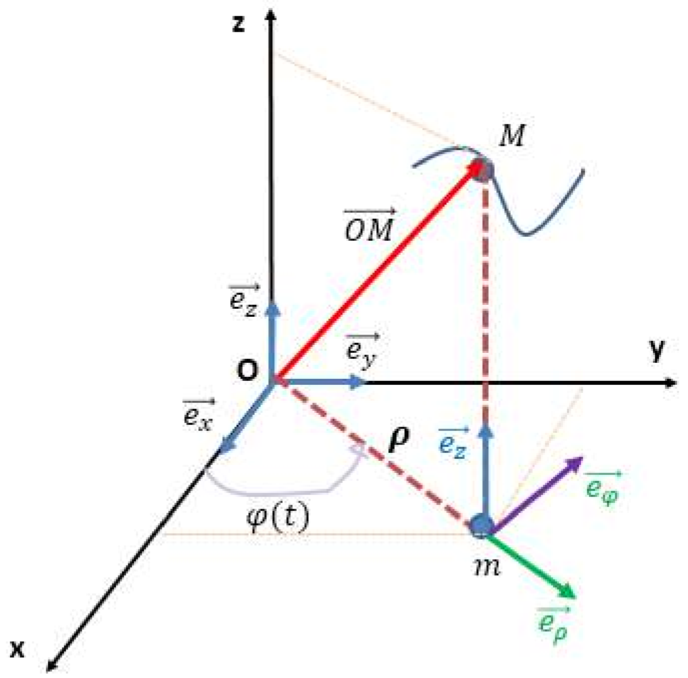
$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z} = \gamma_x\overrightarrow{e_x} + \gamma_y\overrightarrow{e_y} + \gamma_z\overrightarrow{e_z}$$

Le module de l'accélération $\vec{\gamma}$ est donné par :

$$\left\|\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right)\right\| = \sqrt{{\gamma_x}^2 + {\gamma_y}^2 + {\gamma_z}^2} \quad \text{en } (m/s^2)$$

II.2 En coordonnées cylindriques (ρ , φ , z)

Soit $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ est une base cylindrique orthonormée directe



Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est définit sur la base cylindrique ($\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}$) par ses composantes ρ et z:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$$

ρ et z sont les coordonnées cylindriques du point M.
$\rho = \|\overrightarrow{Om}\|$ (est la projection de M sur le plan (xOy)), $\varphi = angle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$ et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$.
Avec : $0 < \rho < +\infty$; $0 < \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$

- Le **vecteur vitesse** $\vec{V}(^M/_R)$ est donné par :

$$\vec{V}(^M/_R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z} + z\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R$$

Avec : $\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R = \vec{0}$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ $\left(\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}\right)$

D'où : $$\vec{V}(^M/_R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

Avec $\dot{\rho}$, $\rho\dot{\varphi}$ et $\dot{z}$ sont les composantes du vecteur $\vec{V}(^M/_R)$ dans la base ($\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}$).

- Le **vecteur accélération** s'obtient par dérivation du vecteur vitesse par rapport au temps t :

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right)}{dt}\right|_{R}$$

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_{R} + \frac{d\dot{z}}{dt}\overrightarrow{e_z} + \dot{z}\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_{R}$$

Avec : $\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_{R} = \vec{0}$; $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_{R} = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\left.\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}\right|_{R} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$

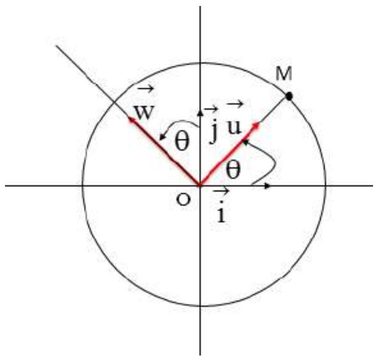
D'où : $\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \ddot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

Cas particulier:
Si la trajectoire de M est plane ($z = 0$) , ce point peut être repéré par ses *coordonnées polaires*
ρ et φ.

Exemples :

Donner les composantes des vecteurs vitesse et accélération d'un point M en mouvement circulaire dans un repère R (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).



Soit R_1(O, $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{k}$) en rotation dans R.

$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{u}}{dt} = R\frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{w}$

On pose $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, la vitesse devient :

$\vec{V} = R\omega\vec{W}$; la vitesse est tangente au cercle.

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est définit par :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$$

On calcule la vitesse $\vec{V}$ en utilisant la formule de dérivation vectorielle et on obtient :

$$\vec{V} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega} \Lambda \vec{OM}$$

or M est fixe dans R_1, on a alors $\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_1} = 0$ et l'expression de $\vec{V}$ devient :

$$\vec{V} = \omega \vec{k} \wedge \vec{OM} = \omega \vec{k} \wedge R\vec{u} = R\omega \vec{w}$$

On pose v = Rω

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{w} - R\omega^2 \vec{u}$$

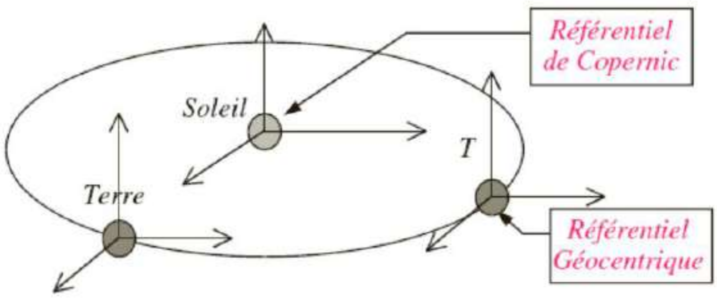
On pose : $\overrightarrow{\gamma_N} = -R\omega^2\vec{u} = -\frac{V^2}{R}\vec{u}$ et $\overrightarrow{\gamma_T} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{w} = \frac{dV}{dt}\vec{w}$ appelés respectivement accélération normale et tangentielle.

II.3 Changement de référentiel

Le repère absolu $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen (en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au repère de Copernic).

•Référentiel Héliocentrique de Copernic : Origine centré sur le soleil (Hêlios), les 3 axes sont dirigés vers 3 étoiles qui s »éloignent du soleil toujours dans la même direction.

•Référentiel géocentrique : L'origine est prise au centre de la terre (Géo) et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles aux axes du repère héliocentrique.



On considère le repère relatif $R_1(O_1, \overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y1}}, \overrightarrow{e_{z1}})$ et en mouvement par rapport au repère absolu $R(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On montre que :

$$\overrightarrow{V_a}(M/R) = \overrightarrow{V_r}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M)$$

$$\overrightarrow{\gamma_a}(M/R) = \overrightarrow{\gamma_r}(M/R_1) + \overrightarrow{\gamma_c}(M) + \overrightarrow{\gamma_e}(M)$$

Avec :

La vitesse absolue : $\vec{V_a}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$

La vitesse relative : $\vec{V_r}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$

La vitesse d'entrainement : $\vec{V_e}(M) = \vec{V}(O_1/R) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

L'accélération absolue : $\vec{\gamma_a}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V_a}(M/R)}{dt}\right|_R$

L'accélération relative : $\vec{\gamma_r}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V_r}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}$

L'accélération d'entrainement :

$$\vec{\gamma_e}(M) = \vec{\gamma}(O_1/R) + \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V_r}(M/R_1)$

Remarques :

$\vec{\omega}(R_1/R)$ le vecteur rotation du repère R_1 par rapport à R.

- Mouvement de translation : $\vec{\omega}(R_1/R) = \vec{0}$
- Mouvement de rotation autour de l'axe (oz) orienté par le vecteur $\vec{e_z}$: $\vec{\omega}(R_1/R) = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e_z} = \dot{\theta}(t)\vec{e_z}$
- $\theta(t)$ est l'angle de rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.
- Si $\vec{\omega}(R_1/R) = \overrightarrow{cte}$ alors $\frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} = \vec{0}$

Chapitre III

Dynamique du point

I La masse et le vecteur quantité de mouvement

Nous considérons comme postulat la conservation de la masse de la particule au cours du temps et l'invariance de la masse par changement de référentiel.
Soit la particule P de masse m en mouvement dans un repère $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$; la position du point P est repérée par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et sa vitesse est donnée par :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$$

m étant un scalaire, le vecteur $\vec{p} = m\vec{V}$ est par définition le vecteur quantité de mouvement de la particule P.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du vecteur quantité de mouvement est nulle pour une particule isolé (c'est-à-dire, elle ne subie et n'exerce aucune action sur d'autres particules) : $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$; il en découle que le vecteur $\vec{p} = m\vec{V}$ est une constante.

Conséquence :

Le mouvement d'une particule libre dans un référentiel galiléen est un mouvement rectiligne uniforme.

II lois de Newton

II.1 Relation fondamentale de la dynamique

Dans un repère galiléen, pour un corps non isolé, la dérivée du vecteur quantité de mouvement n'est pas nulle. On appelle vecteur force s'exerçant sur la particule, le vecteur $\vec{F}$ définit par :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

représentant la relation fondamentale de la dynamique.

Le vecteur $\vec{F}$ traduit la résultante des actions extérieures sur la particule étudiée.

II.2 Principe d'inertie

Dans un repère galiléen, si la particule est isolée $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, l'accélération $\vec{\gamma}$ est alors nulle. La particule P garde une vitesse constante (équilibre dynamique) ou reste immobile si sa vitesse initiale est nulle (équilibre statique).

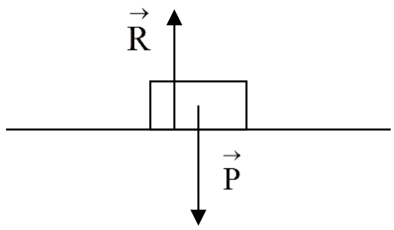
II.3 Principe de l'action et de la réaction

Si un corps 1 exerce la force $\vec{F}_{12}$ sur le corps 2, ce dernier réagit en exerçant une force $\vec{F}_{21}$ sur le corps 1, tel que :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Exemple :

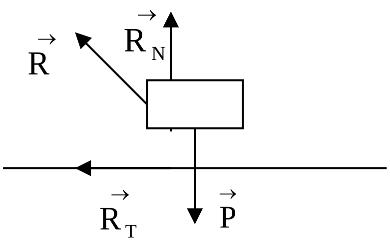
En l'absence de frottement le poids $\vec{P}$ du corps est équilibré par la réaction de la table $\vec{R}$. En l'absence de frottement $\vec{R}$ est normale à la table.



En présence du frottement $\vec{R}$ n'est plus dirigée suivant la normale et l'on définit le coefficient de frottement k est définit par :

K=tg φ = $\frac{R_T}{R_N}$

avec φ est un angle : $\varphi = (\vec{R}\,,\overrightarrow{R_N})$



III Loi fondamentale dans un repère non galiléen

On considère le repère galiléen $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_y}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_z}})$, le repère R_1 est accéléré dans R.

Dans le repère absolu R, l'application de la loi fondamentale à un point matériel de masse m, soumis à une résultante des forces extérieures $\vec{F}$, s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}_A = m(\vec{\gamma}_R + \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)$$

On en déduit :

$$m\vec{\gamma}_R = \vec{F} - m\vec{\gamma}_E - m\vec{\gamma}_C$$

où encore :

$$m\vec{\gamma}_R = \vec{F} + \vec{F}_E + \vec{F}_C$$

avec :

$\vec{F}$: la résultante des forces extérieures

$\vec{F}_E = -m\vec{\gamma}_E$ force d'inertie d'entraînement

$\vec{F}_C = -m\vec{\gamma}_C$ force d'inertie de Coriolis

La relation fondamentale de la dynamique conserve sa forme primitive quand on l'applique dans un repère non galiléen, à condition d'ajouter à la force $\vec{F}$ définie dans le repère R les forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

Cas particulier :

Le point P est lié au repère relatif R_1, on a alors : $\vec{V}_R = \vec{0}$

$\vec{F}_C = -m\vec{\gamma}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_R = \vec{0}$ et $\vec{F}_E = -m\vec{\gamma}_E = +mR\omega^2\vec{u}$, qui est une force centrifuge.

IV Loi de gravitation

Deux masses m_1 et m_2 distantes de r s'attire mutuellement avec des forces égales et opposées :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Le module de ces forces est :

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

G est la constante universelle, il vaut 6,67 10^{-11} MKSA.

Chapitre IV

Travail et énergie

I Travail

Soit une particule M soumise à une force $\vec{F}$. On appelle travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $\vec{dM}$ la forme différentielle :

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dM}$$

Dans un repère galiléen $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, les composantes de $\vec{F}$ sont F_x, F_y et F_z et ceux de $\vec{dM}$ sont dx, dy et dz., on a alors :

$$\delta W = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

δW est donc un scalaire.
Conséquence :

- Si $\vec{F}$ est orthogonale au déplacement, le travail effectué par $\vec{F}$ est nul.
- Quand plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ agissent sur une particule, le travail effectué au cours d'un déplacement $\vec{dM}$ est :

$$\delta W = \vec{F_1}.\vec{dM} + \vec{F_2}.\vec{dM} + \vec{F_3}.\vec{dM} = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}).\vec{dM} = \vec{F}.\vec{dM}$$

Le travail de la somme de plusieurs forces appliquées à la même particule est égal à la somme des travaux.

- Supposons que $\vec{F}$ est constante en grandeur et direction et soit AB la trajectoire droite suivie par la particule. Le travail W_{AB} est obtenu par :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dM} = \int_A^B F.dx = F\int_A^B dx = F(x_B - x_A)$$

II Puissance

On appelle puissance fournie par la force $\vec{F}$ au cours du mouvement de la particule, la quantité :

$$P = \vec{F}.\vec{V}$$

Or $$d\vec{M} = \vec{V}.dt$$

$$\delta W = \vec{F}\,.\,\vec{V}\,dt$$

On a alors :

$$\delta W = P.dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$$

L'unité du travail est le Joule (J) et l'unité de la puissance est le Watt (W).

III Théorème de l'énergie cinétique

$$\delta W = \vec{F}\,.\,\vec{V}\,dt = m\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}\,dt$$

Or, $m\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps de $\frac{1}{2}mV^2$, donc

$$\delta W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,V^2\right)dt$$

Le travail entre deux instant t_1 et t_2 est :

$$W = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mV^2\right)dt = \frac{1}{2}mV^2(t_2) - \frac{1}{2}mV^2(t_1)$$

On appelle énergie cinétique de la particule la fonction scalaire de V, E_c tel que :

$$E_c = \frac{1}{2}m\,V^2$$

D'où :

$$W = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

Elle conduit à l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique :

> La variation de l'énergie cinétique d'un système de points matériels entre deux instants donnés est égale au travail de la force appliquée sur le trajet réellement parcouru au cours de cette durée.

Conséquence :

$$\delta W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,V^2\right)dt = \frac{dE_C}{dt}\,dt = P.dt$$

$$P=\frac{dE_C}{dt}$$

IV Energie potentiel

Lorsque la force $\vec{F}$ n'est fonction que de l'abscisse x de la particule, et c'est souvent le cas, il existe une fonction scalaire $E_p(x)$ telle que :

$$F(x) = -\frac{dE_P(x)}{dx}$$

Or,

$$P=\vec{F}.\vec{V} = F(x).\frac{dx}{dt}=\frac{dE_C}{dt}$$

On remplace F(x) par son expression : $F(x)= -\frac{dE_P(x)}{dx}$

On obtient alors ;

$$-\frac{dE_P(x)}{dx}.\frac{dx}{dt}=\frac{dE_C}{dt}$$

d'où ;

$$-\frac{dE_p}{dt}=\frac{dE_C}{dt}$$

$$\frac{dE_p}{dt}+\frac{dE_C}{dt}=0 \text{ ou } \frac{d(E_p(x)+E_C)}{dt}=0$$

$$E_p(x) + E_c=C$$

C est une constante.

La somme $E_p(x)$ + E_c =C est appelé énergie totale de la particule : elle est conservée au cours du temps. La constante C est déterminée par les conditions initiales, à savoir V_0 et la position x_0.

$$C = E_p(x_0) + \frac{1}{2}mV_0^2$$

En écrivant la conservation de l'énergie, on obtient l'équation :

$$E_p(x) + E_c = E_p(x_0) + \frac{1}{2}mV_0^2$$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage