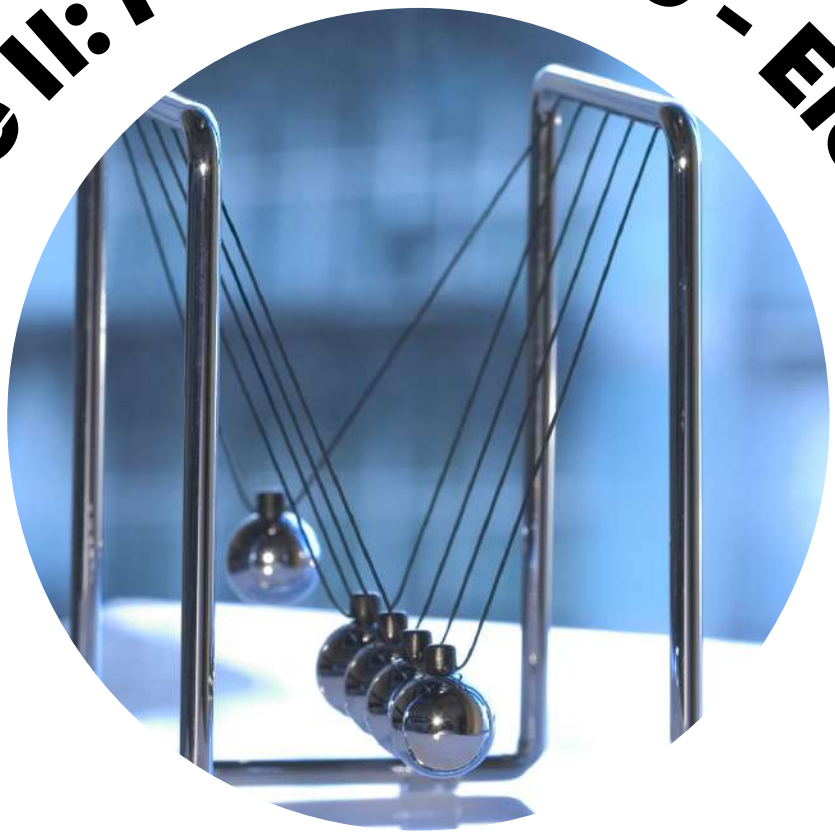
@Mohamed_Nahli

BIOLOGIE MAROC
www.biologie-maroc.com

Physique II: Mécanique - Electricité



SCIENCES DE LA
VIE ET DE LA TERRE

Shop

• Cahiers de Biologie + Lexique
• Accessoires de Biologie

Etudier

Visiter Biologie Maroc pour étudier et passer des QUIZ et QCM enligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.

Emploi

• CV • Lettres de motivation • Demandes...
• Offres d'emploi
• Offres de stage & PFE

Partie I: Mécanique du point

Faculté des Sciences de Tétouan

Filière: SVI-STU

Module: Physique II

Pr. Mohammed ES-SADDIK

Année Universitaire: 2021-2022

Plan

- Chapitre I: Compléments mathématiques
- Chapitre II: Cinématique du point
- Chapitre III: Dynamique du point
- Chapitre IV: Travail et énergie

Chapitre I:

Compléments mathématiques

I-Calcul vectoriel

grandeurs physiques

Une grandeur scalaire

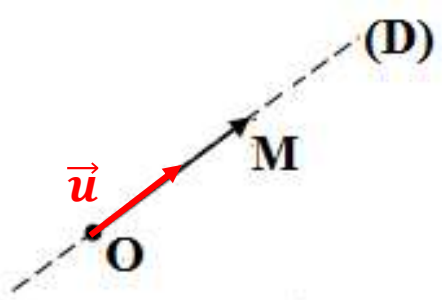
Est une grandeur non orientée dans l'espace:
La masse, le temps, la température…….

Une grandeur vectorielle

Est une grandeur orientée dans l'espace:
La vitesse, l'accélération, la force, …..

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est caractérisé par :

- L'origine : **O**
- La direction : la droite **(D)**
- le sens : de l'origine **O** vers l'extrémité **M**
- Le module : valeur numérique réelle qui représente la longueur du vecteur $OM = \|\overrightarrow{OM}\|$



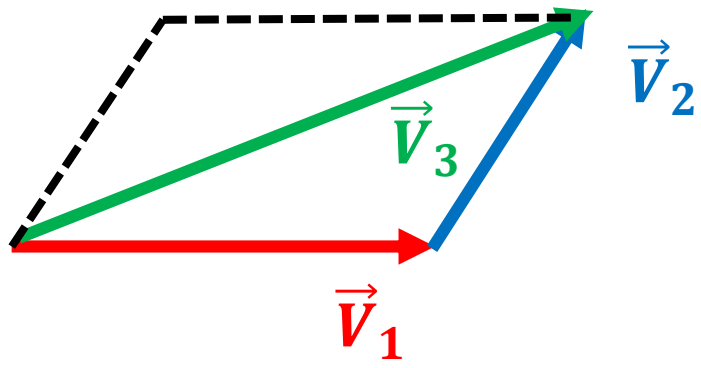
Le vecteur unitaire $\vec{u}$

tout vecteur de module égale à l'unité : $\|\vec{u}\| = 1$

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|.\vec{u} = OM.\vec{u}$$

I-Calcul vectoriel

Addition vectoriel



$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

❖ **Propriétés :**

- **Commutativité** : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

Attention!! la soustraction vectorielle n'est pas commutative $\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$

- **Associativité :** $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$

I-Calcul vectoriel

Multiplication par un scalaire

- Un vecteur $\overrightarrow{V'}$ colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{V'} = \lambda \overrightarrow{V}$

- Le sens dépend de λ:
  - Si $\lambda > 0$: $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont de même sens

$\overrightarrow{V'} = 2\overrightarrow{V}$ $(\lambda = 2)$

  - Si $\lambda < 0$: $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ sont de sens contraire

$\overrightarrow{V'} = -2\overrightarrow{V}$ $(\lambda = -2)$

❖ Propriétés :

- **Distributivité :**

✓ $(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{V} = \lambda_1\overrightarrow{V} + \lambda_2\overrightarrow{V}$

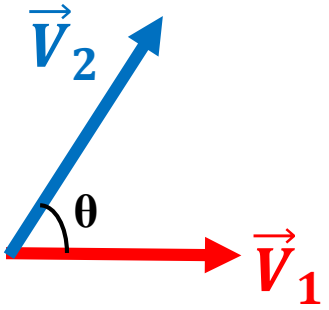
✓ $\lambda . (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \lambda . \overrightarrow{V_1} + \lambda . \overrightarrow{V_2}$

I-Calcul vectoriel

Produit scalaire

- $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \lambda = \|\vec{V}_1\| . \|\vec{V}_2\| . \cos(\theta)$ Avec $\theta = (\hat{\vec{V}_1; \vec{V}_2})$

Un scalaire



❖ Propriétés :

- **Commutativité** : $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \vec{V}_2 . \vec{V}_1$
- **Associativité** : $(\lambda \vec{V}_1) . \vec{V}_2) = \vec{V}_1 . (\lambda \vec{V}_2)$
- **Distributivité** : $\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 + \vec{V}_1 . \vec{V}_3$

I-Calcul vectoriel

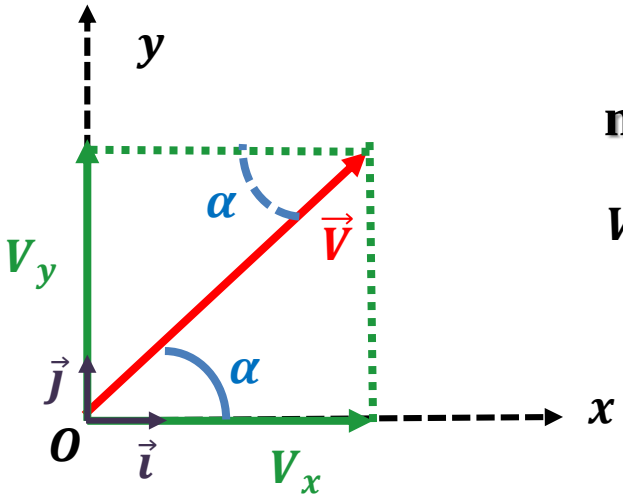
Composantes d'un vecteur

Le repère cartésien est un repère orthonormé : les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ doivent être orthogonaux entre eux et normés à l'unité.

- Dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$\vec{V}_x = V_x.\vec{\imath}$ $\qquad$ $\vec{V}_y = V_y.\vec{\jmath}$



module du vecteur

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$V_x = \mathrm{V}.\cos(\alpha)$ *et* $V_y = \mathrm{V}.\sin(\alpha)$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = V_x.\vec{\imath} + V_y.\vec{\jmath} = \mathrm{V}.\cos\alpha\,\vec{\imath} + \mathrm{V}.\sin\alpha\,\vec{\jmath}$$

❖ Les composantes du vecteur $\vec{V}$ dansle plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont: V_x et V_y $\qquad$ $\vec{V}(V_x; V_y)$

❖ Les composantes du vecteur $\vec{V}$ dansle l'espace $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont: V_x et V_y et V_z

I-Calcul vectoriel

Composantes d'un vecteur

Application 1:

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$: $\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$

1- Déterminer les composantes de chaque vecteur dans le l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

2- Calculer le module de chaque vecteur

3- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$

Correction:

1-

- $\vec{V}_1 \begin{vmatrix} V_{1x} = 2 \\ V_{1y} = 3 \\ V_{1z} = -1 \end{vmatrix}$ $\vec{V}_2 \begin{vmatrix} V_{2x} = 2 \\ V_{2y} = 2 \\ V_{2z} = -1 \end{vmatrix}$

2-

- $\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$
- $\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

3-

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

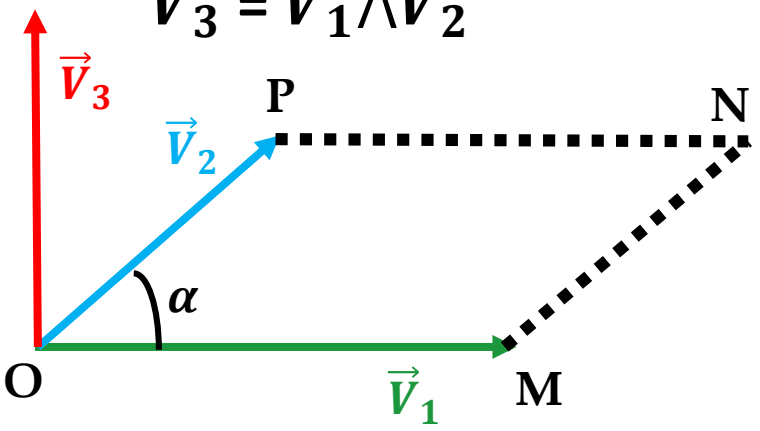
Donc: $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (V_{1x}.V_{2x}) + (V_{1y}.V_{2y}) + (V_{1z}.V_{2z}) = (2 \times 2) + (3 \times 2) + (-1 \times (-1)) = 11$

I-Calcul vectoriel

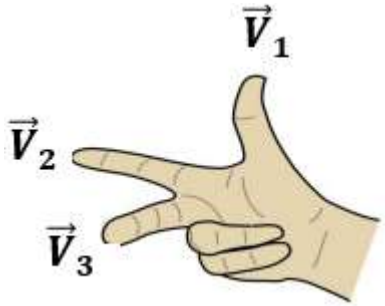
Produit vectoriel

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par ces deux vecteurs.

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$



- La direction du vecteur $\vec{V}_3$ est trouvée par la règle des trois doigts de la main droite.



- Le module du vecteur $\vec{V}_3$ est calculé comme suit : $\|\overrightarrow{V_3}\| = \|\overrightarrow{V_1}\|.\|\overrightarrow{V_2}\|.|sin(\alpha)|$

  Avec $\alpha = (\hat{\vec{V}_1}; \vec{V}_2)$

- Le module du vecteur $\|\overrightarrow{V_3}\|$ représente **l'aire** du parallélogramme (**OMNP**) formé par les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

I-Calcul vectoriel

Produit vectoriel

- Le produit vectoriel peut être calculé à partir de la méthode du déterminant :

Soit deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ telle que : $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

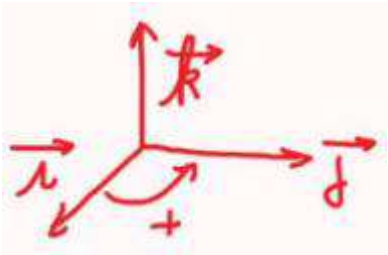
$$\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V_3} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,\vec{i} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{V_3}\right\| = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$ est le module du vecteur $\vec{V_3}$

I-Calcul vectoriel

Produit vectoriel



Remarque:

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ $\quad$ $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

❖ Propriétés :

- Le produit vectoriel **n'est pas commutatif**: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- Le produit vectoriel est distributif par rapport à la multiplication

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3)$$

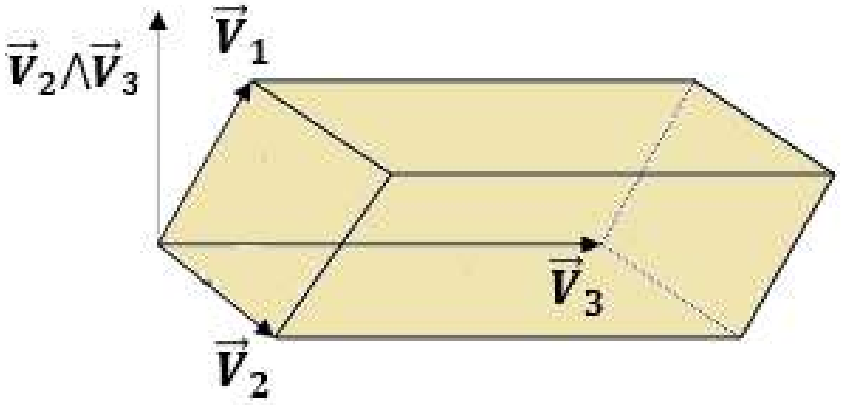
- Le produit vectoriel est **non associatif:** $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

I-Calcul vectoriel

Produit mixte

- Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ est le scalaire noté: $\vec{V}_1.\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3$
- La valeur absolue du produit mixte représente le volume **V** du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

$$V=|\vec{V}_1.\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3|$$



$$\vec{V}_1.\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=(y_2z_3-y_3z_2)x_1-(x_2z_3-x_3z_2)y_1+(x_2y_3-x_3y_2)z_1$$

- Le produit mixte des vecteurs $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ et est noté : $(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3)$

I-Calcul vectoriel

Produit mixte

❖ Propriétés :

- La valeur du produit mixte ne change pas de signe si on permute les trois vecteurs, c'est à dire : $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = (\vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_1}) = (\vec{V_3}, \vec{V_1}, \vec{V_2})$
- Le produit mixte est nul quand deux vecteurs sont colinéaires.

Application 3:

Soit trois vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$:

$\vec{V_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{V_2} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{V_3} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

1- Calculer $\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$

Correction:

- $\vec{V_1} \begin{vmatrix} V_{1x} = 2 \\ V_{1y} = 3 \\ V_{1z} = -1 \end{vmatrix}$ $\vec{V_2} \begin{vmatrix} V_{2x} = 2 \\ V_{2y} = 2 \\ V_{2z} = -1 \end{vmatrix}$ $\vec{V_3} \begin{vmatrix} V_{3x} = 1 \\ V_{3y} = 2 \\ V_{3z} = -2 \end{vmatrix}$

Donc: $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= (2 \times (-2) - 2 \times (-1)) - (2 \times (-2) - 1 \times (-1))\vec{\jmath} + (2 \times 2 - 1 \times 2)\vec{k} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

- $\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}).(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}) = (2 \times (-2)) + (3 \times 3) + (-1 \times 2) = 3$

I-Calcul vectoriel

Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est le vecteur noté :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

Application 4:

Soit trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$: $\vec{V}_1 = \omega \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \omega \vec{k}$ et $\vec{V}_3 = a\vec{\imath} + b\vec{k}$

- Calculer $\vec{V}_4 = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

Correction:

- $\vec{V}_1 \begin{vmatrix} V_{1x} = 0 \\ V_{1y} = 0 \\ V_{1z} = \omega \end{vmatrix}$
- $\vec{V}_2 \begin{vmatrix} V_{2x} = 0 \\ V_{2y} = 0 \\ V_{2z} = \omega \end{vmatrix}$
- $\vec{V}_3 \begin{vmatrix} V_{3x} = a \\ V_{3y} = 0 \\ V_{3z} = b \end{vmatrix}$

- $\vec{V}_1 . \vec{V}_3 = (V_{1x}.V_{3x}) + (V_{1y}.V_{3y}) + (V_{1z}.V_{3z}) = (0 \times a) + (0 \times 0) + (\omega \times b) = \omega b$
- $\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = (V_{1x}.V_{2x}) + (V_{1y}.V_{2y}) + (V_{1z}.V_{2z}) = (0 \times 0) + (0 \times 0) + (\omega \times \omega) = \omega^2$

- $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\vec{V}_3 = \omega b . \vec{V}_2 - \omega^2 . \vec{V}_3 = \omega b . \omega \vec{k} - \omega^2 . (a\vec{\imath} + b\vec{k})$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \omega^2 b \vec{k} - \omega^2 a \vec{\imath} - \omega^2 b \vec{k} = -\omega^2 a \vec{\imath}$$

II-Différentielle

Dérivé d'une fonction à plusieurs variables

❑ Soit une fonction f qui dépend de trois variables x, y et z : $f = f(x, y, z)$

- La dérivée partielle de f par rapport à x , notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est obtenue en dérivant par rapport à x et en considérant y et z comme des **constantes**.
- La dérivée partielle de f par rapport à y , notée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est obtenue en dérivant par rapport à y et en considérant x et y comme des **constantes**.
- La dérivée partielle de f par rapport à z , notée $\frac{\partial f}{\partial z}$ est obtenue en dérivant par rapport à z et en considérant x et y comme des **constantes**.

Exemple:

$$f(x, y, z) = xy^2 + \cos z \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -\sin z \end{cases}$$

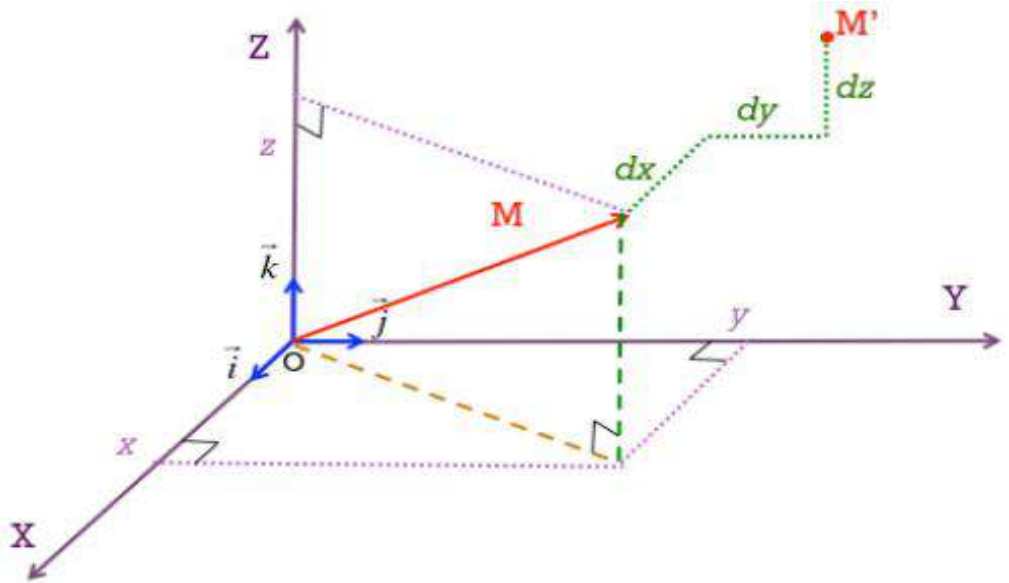
II-Différentielle

Différentielle totale

❑ La différentielle du champ scalaire $f(x,y,z)$ est définie par :

$$df = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

Géométriquement, elle représente la variation de la fonction f d'un point $M(x,y,z)$ à un point infiniment voisin $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$



Exemple:

$f(x,y,z) = xy^2 + cosz$ ⇒ $df = y^2dx + 2xydy - sinzdz$

II-Différentielle

Dérivé temporelle d'une fonction vectorielle

- Soit la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$ dépendant du temps t. La dérivé de la fonction $\vec{V}(t)$ par rapport à t est la fonction $\vec{V'}(t)$ définit par :

$$\vec{V'}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

❖ **Propriétés :**

- Si $\vec{V}(t)$ est une constante $\Longrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt}=0$
- $\frac{d\vec{V}_1.\vec{V}_2}{dt}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}\vec{V}_2+\vec{V}_1\frac{d\vec{V}_2}{dt}$
- $\frac{d\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2}{dt}=\frac{d\vec{V}_1}{dt}\wedge\vec{V}_2+\vec{V}_1\wedge\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

II-Différentielle

Dérivé temporelle d'une fonction vectorielle

- Soit un repère $\boldsymbol{R_1}$ en mouvement par rapport à un repère $\boldsymbol{R}$, on définit la dérivée d'un vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$ dans un repère $\boldsymbol{R}$ par la relation suivante :

$$\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}$$

$\vec{\Omega}(R_1/R)$ est le vecteur rotation instantané du repère R_1 par rapport à R

❖ Propriétés :

- Si le vecteur $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{t})$ est lié au repère R_1 : ⇒ $\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R_1} = 0$

⇒ $\boxed{\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{R} = \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}}$

- Dérivée d'une fonction vectorielle composée: $\frac{d\vec{V}(\theta(t))}{dt} = \frac{d\vec{V}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$

Chapitre II

Cinématique du point matériel

I-Notations et définitions

La cinématique:

Etude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel..).

Point matériel

Un point matériel est un objet dont la forme et la dimension sont négligeables lors de l'étude de son mouvement. seul le centre de masse est à considérer. l'orientation et la rotation ne sont pas prise en considération dans le mouvement.

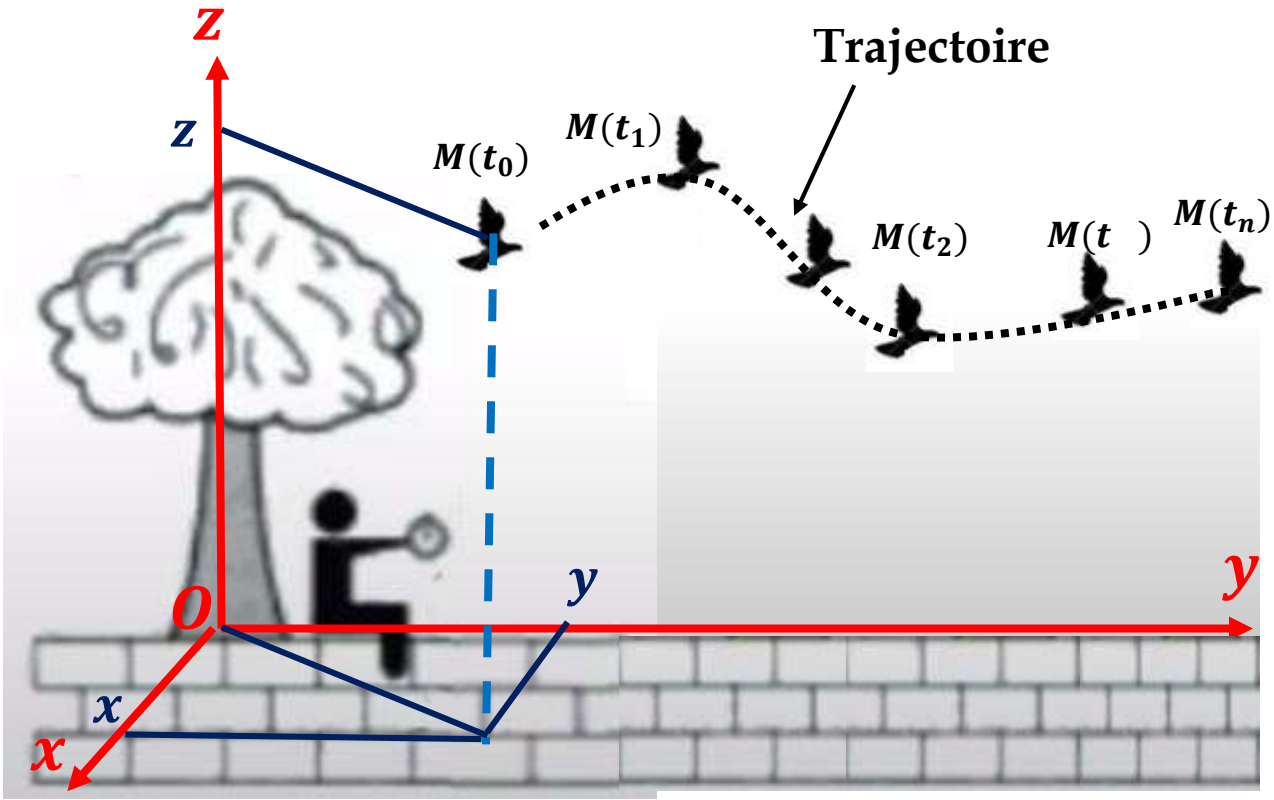
Espace, temps et référentiel

- Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir un origine O et une base.
- **Le temps** est un concept lié à la notion d'évolution.
- **Le référentiel** : repère d'espace muni d'une horloge
- Le mouvement d'un point est un concept **relatif**. En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un corps est "**en mouvement**" (ou "**au repos**") sans préciser par rapport à quoi.

I-Notations et définitions

Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère au cours du temps.



I-Notations et définitions

- La description du mouvement consiste à indiquer la position du mobile **M(t)** à chaque instant. on dit que le mobile M(t) est défini par une équation horaire appelé équation paramétrique dont le paramètre est le temps t.

- Si $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$, et $\boldsymbol{u_3}$ sont les composantes spatiales du point $M\begin{pmatrix}\boldsymbol{u_1}\\ \boldsymbol{u_2}\\ \boldsymbol{u_3}\end{pmatrix}$ dans un référentiel $\boldsymbol{R}$, alors **l'équation paramétrique** est: $\boldsymbol{u_1(t) = f_1(t)}$, $\boldsymbol{u_2(t) = f_2(t)}$, et $\boldsymbol{u_3(t) = f_3(t)}$

- L'équation de la trajectoire est l'équation qui relie les cordonnées spatiales de la particule: $\boldsymbol{f(u_1, u_2, u_3) = 0}$

Exemple:

Dans le plan (xOy): $\mathbf{x(t) = t}$ et $\mathbf{y(t) = t^2}$

- L'équation de la trajectoire est: $\boldsymbol{y = x^2}$ (la trajectoire est une parabole)
- Le point M se déplace sur une parabole dans le plan (xOy)

II-Systèmes de coordonnées

Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

1- Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

On associé au repère cartésienne, la base orthonormée $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

❖ Expression du vecteur position

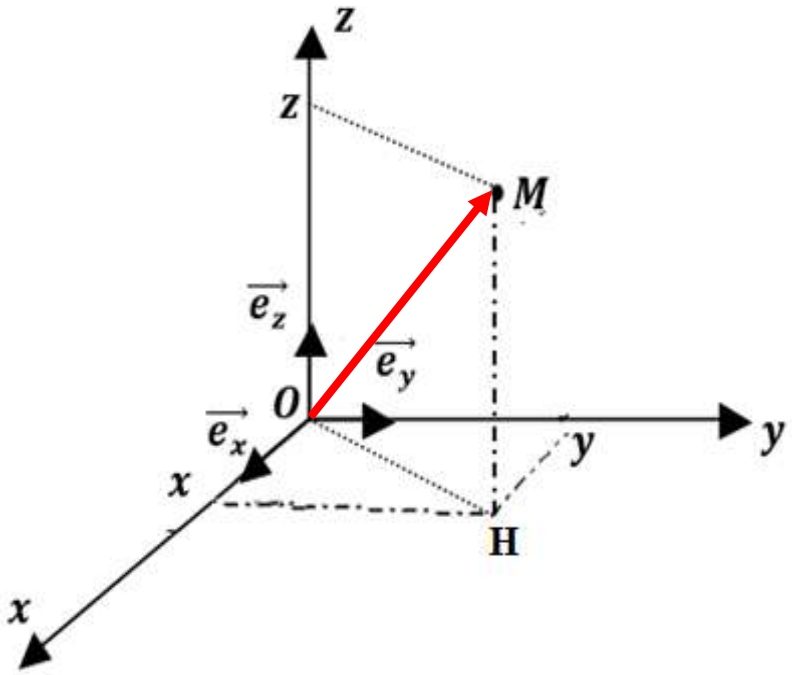
La position dans l'espace d'un point matériel est indiquée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{OH} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} \qquad \overrightarrow{HM} = z\vec{e_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}$$

Son module: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

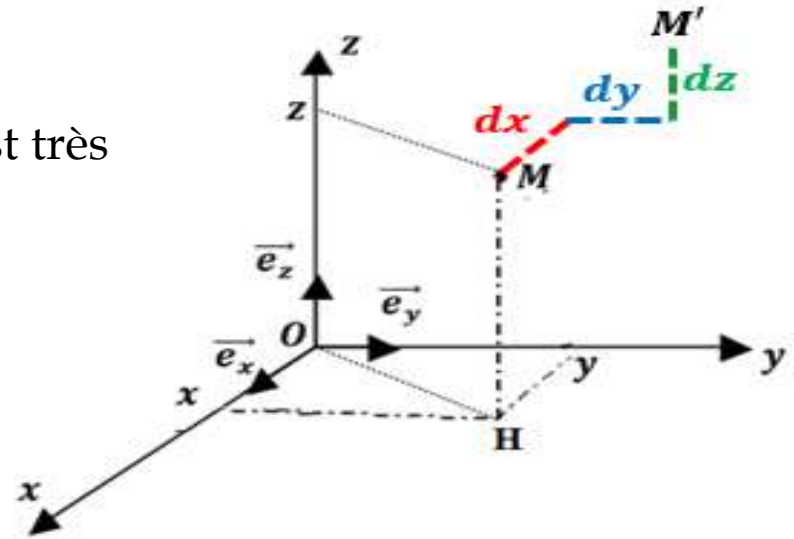


II-Systèmes de coordonnées

Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M′ est très voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$



❖ **Vecteur Vitesse:**

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\left(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d(x\overrightarrow{e_x})}{dt}\right|_R + \left.\frac{d(y\overrightarrow{e_y})}{dt}\right|_R + \left.\frac{d(z\overrightarrow{e_z})}{dt}\right|_R$$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}.\overrightarrow{e_x} + x.\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right|_R + \frac{dy}{dt}.\overrightarrow{e_y} + y.\left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}\right|_R + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z} + z.\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R$$

$\left.\frac{d\overrightarrow{e_x}}{dt}\right|_R = 0$; $\left.\frac{d\overrightarrow{e_y}}{dt}\right|_R = 0$; $\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R = 0$

$\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont fixes dans R

II-Systèmes de coordonnées

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}.\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}.\vec{e_y} + \; + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z}$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}.\vec{e_x} + \dot{y}.\vec{e_y} + \; + \dot{z}.\vec{e_z}$$

$$\vec{V}(M/R) = V_x.\vec{e_x} + V_y.\vec{e_y} + \; + V_z.\vec{e_z}$$

V_x , V_y et V_z sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

- **Son module :**

$$\left\|\vec{V}(M/R)\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

en $m.s^{-1}$

❖ **Vecteur accélération:**

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\left(V_x.\vec{e_x} + V_y.\vec{e_y} + \; + V_z.\vec{e_z}\right)}{dt}\right|_R$$

II-Systèmes de coordonnées

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d(V_x\vec{e_x})}{dt}\right|_R + \left.\frac{d(V_y\vec{e_y})}{dt}\right|_R + \left.\frac{d(V_y\vec{e_z})}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{dV_x}{dt}.\vec{e_x} + x.\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dV_y}{dt}.\vec{e_y} + y.\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dV_z}{dt}.\vec{e_z} + z.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right|_R$$

$\frac{d\vec{e_x}}{dt} = 0$; $\frac{d\vec{e_y}}{dt} = 0$; $\frac{d\vec{e_z}}{dt} = 0$

$V_x = \frac{dx}{dt}$; $V_y = \frac{dy}{dt}$; $V_z = \frac{dz}{dt}$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \quad + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \quad + \ddot{y}\,\vec{e_z}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_x\vec{e_x} + \gamma_y\vec{e_y} + \quad + \gamma_z\vec{e_z}$$

γ_x , γ_y **et** γ_z sont les composantes du vecteur accélération $\vec{V}(M/R)$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

- **Son module:**

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}$$ en $m.s^{-2}$

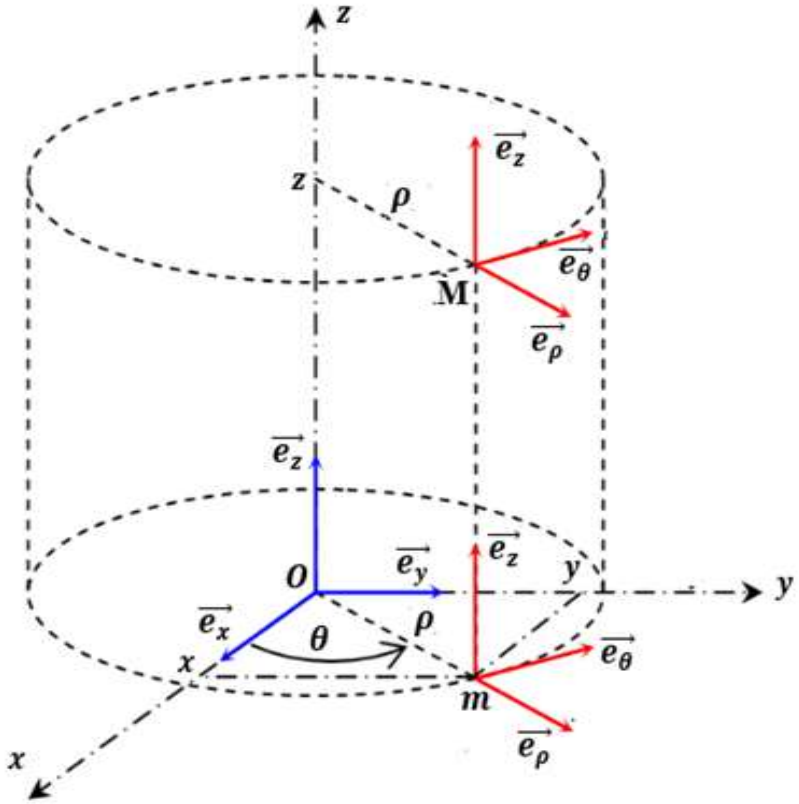
II-Systèmes de coordonnées

2- Coordonnées cylindrique (ρ, θ, z)

- La base cylindrique est $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, elle est orthonormé direct.
- (ρ, θ, z) sont les coordonnées cylindrique du point M.

Avec:

- $\rho = \|\overrightarrow{Om}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**m** est la projection de **M** sur le plan (xOy) ; $\rho \geq 0$
- θ est l'angle $(\overrightarrow{e_x}; \overrightarrow{Om})$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oz



❖ Expression du vecteur position

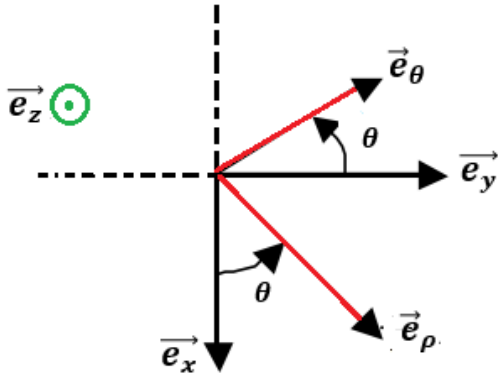
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$$

$\overrightarrow{Om} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$ $\qquad$ $\overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{e_z}$

II-Systèmes de coordonnées

- les vecteures unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ s'écrivent dans la base cartésienne sous forme:

$$\vec{e}_\rho = \cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$



Remarque:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} = .\dot{\theta}.\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} = .\dot{\theta}.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \end{cases}$$

$$x = \rho.\cos\theta$$
$$y = \rho.\sin\theta$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Déplacement élémentaire:

- Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' est très voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dOM} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

II-Systèmes de coordonnées

❖ **Vecteur Vitesse:**

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Avec: $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\rho\overrightarrow{e_\rho}\right)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\left(z\overrightarrow{e_z}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + \frac{dz}{dt}.\overrightarrow{e_z} + z.\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R$$

$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta$; $\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R = 0$

$\frac{dz}{dt} = \dot{z}$; $\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{z}.\overrightarrow{e_z}$$

❖ **Le module de vecteur Vitesse est:**

$$\left\|\vec{V}(M/R)\right\| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho.\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2}$$

II-Systèmes de coordonnées

❖ Vecteur accélération:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\left(\dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{z}.\overrightarrow{e_z}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\left(\dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho}\right)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\left(\rho.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\left(\dot{z}.\overrightarrow{e_z}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\dot{\rho}}{dt}.\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}.\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}.\vec{e}_\theta + \rho.\dot{\theta}\left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_R + \frac{d\dot{z}}{dt}.\overrightarrow{e_z} + \dot{z}.\left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta \qquad \left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}.\vec{e}_\rho \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}\right|_R = 0$$

II-Systèmes de coordonnées

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - \rho.\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_\rho + \ddot{z}.\vec{e_z}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e_z}$$

❖ **Le module de vecteur accélération est:**

$$\|\vec{\gamma}(M/R)\| = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

Remarque:

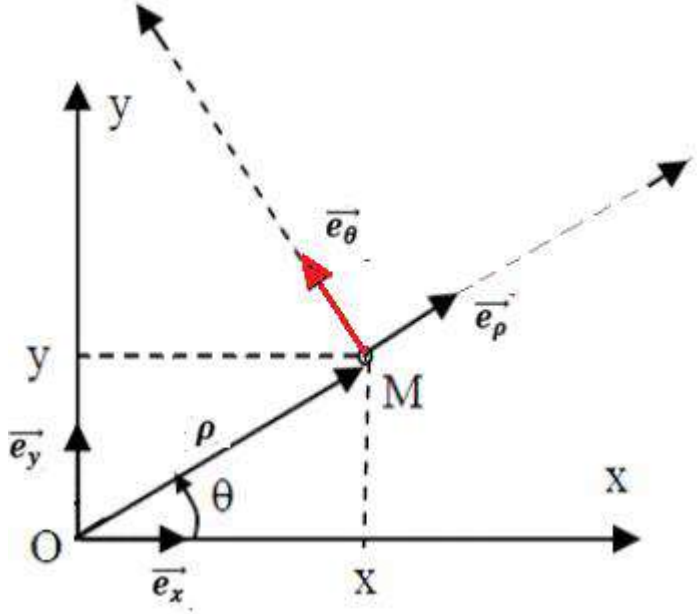
- Rotation uniforme: $\dot{\theta} = cte \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e_z}$$

II-Systèmes de coordonnées

3- Coordonnées polaire (ρ, θ)

- Si le mobile effectue une rotation dans un plan **(O,x,y)** alors le system de coordonnées cylindriques se réduit à un système de coordonnées polaires, où z n'intervient pas.
- Le système de coordonnées polaires est défini par (ρ, θ), où ρ et θ se définissent de la même manière comme en coordonnées cylindriques.



II-Systèmes de coordonnées

Coordonnées Cylindrique

Coordonnées polaire

$$(\rho, \theta, z) \xrightarrow{z = 0} (\rho, \theta)$$

❖ **Vecteur position:**

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z} \longrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$$

❖ **Vecteur vitesse:**

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{z}.\overrightarrow{e_z} \longrightarrow \vec{V}(M/R) = \dot{\rho}.\overrightarrow{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

❖ **Vecteur accélération:**

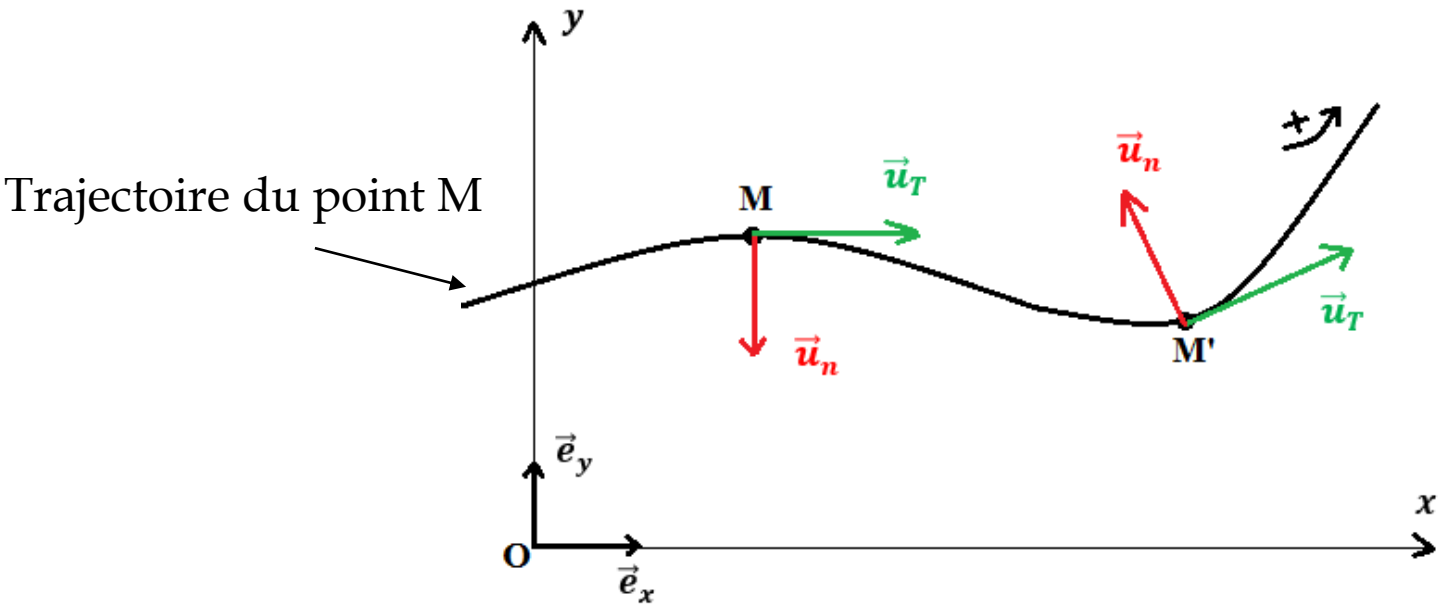
$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

II-Systèmes de coordonnées

4- Repère de Frenet

- Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M. dans le cas d'un trajectoire plane on définit le repère de Frenet par $(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}})$ telque:

- $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{T}}$: étant un vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
- $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}$:étant un vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.



II-Systèmes de coordonnées

- Comme le vecteur vitesse $\vec{V}$ est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est : $\vec{V} = V\,\vec{u}_T$
- Le vecteur accélération est: $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\,\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dV}{dt}.\vec{u}_T + V.\frac{d\vec{u}_T}{dt}$
- Avec: $\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{V}{\rho}\vec{u}_n$ d'où: $\vec{\gamma} = \frac{dV}{dt}.\vec{u}_T + \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_n = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N.\vec{u}_n$

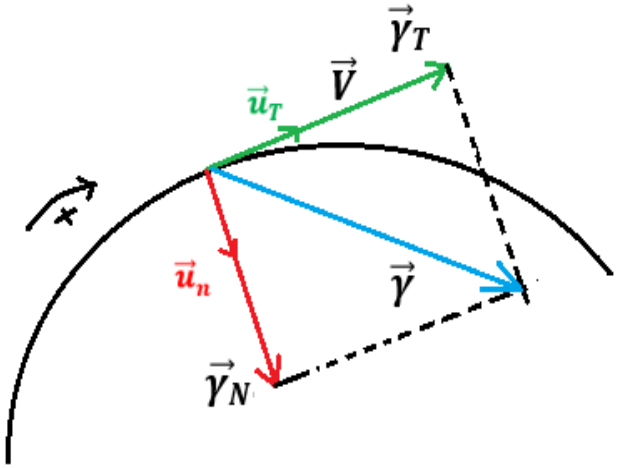
✓ $\gamma_T = \frac{dV}{dt}$:est la valeur de **l'accélération tangentielle**, Elle peut être positive, négative ou nulle.

✓ $\gamma_N = \frac{V^2}{\rho}$: est la valeur de **l'accélération normale**, Elle peut être positive ou nulle.

ρ : rayon de courbure de la trajectoire

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_n$$

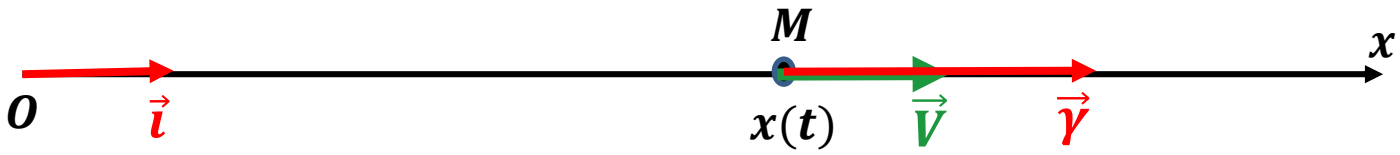
$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_T^2 + \gamma_N^2}$$



III- Etude des mouvements usuels

1. Mouvement rectiligne

❑ Considérons un point M en mouvement le long d'un axe (Ox):



❖ **Vecteur position:** $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{e_x} = x\,\overrightarrow{e_x}$

❖ **Vecteur vitesse:** $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(x\,\overrightarrow{e_x})}{dt}\right|_R = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$

❖ **Vecteur accélération:** $\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d^2(x\,\overrightarrow{e_x})}{dt^2}\right|_R = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}$

III- Etude des mouvements usuels

Cas particulier:

- **a. Mouvement rectiligne uniforme:**

C'est un mouvement du mobile M dont l'accélération est constamment nulle.

$$\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 0} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Leftrightarrow \boxed{V = cte}$$

Quelque soit le temps t, la vitesse du mouvement est constante:

$$V(t) = V(t_0) = cte = V_0$$

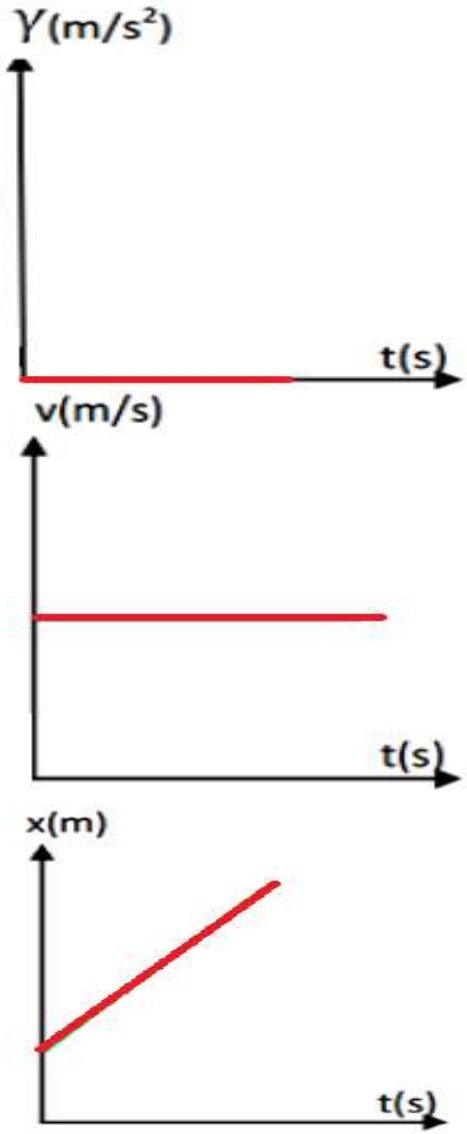
- $\frac{dx}{dt} = V_0 \Leftrightarrow dx(t) = V_0.dt \Rightarrow x(t) = V_0.t + cte$

À $t = 0$: $x(t = 0) = V_0 \times 0 + cte = cte = x_0$

✓ L'abscisse x_0 correspondant à la position du point M à l'instant $t = 0$

$$\boxed{x(t) = V_0.t + x_0}$$

C'est l'équation horaire du mouvement **rectiligne uniforme**



III- Etude des mouvements usuels

- **b. Mouvement rectiligne uniformément varié:**

On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié lorsque son accélération est **constante** au cours du temps: $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_0 = \gamma_0 \vec{e}_x$ Avec: $\boldsymbol{\gamma_0 = cte}$

- $\gamma_0 = \frac{dV}{dt} \Leftrightarrow \quad dV(t) = \gamma_0 . dt \quad \Rightarrow \int dV(t) = \int \gamma_0 . dt \quad \Rightarrow \quad V(t) = \gamma_0 . t + cte$

À $t = 0$: $V(t = 0) = \gamma_0 \times 0 + cte = cte = V_0$ ⇨ $\boldsymbol{V(t) = \gamma_0 . t + V_0}$

✓ V_0 correspondant à la vitesse du point M à l'instant t_0

- $\frac{dx}{dt} = V(t) = \gamma_0 . t + V_0 \Leftrightarrow \quad dx(t) = (\gamma_0 . t + V_0) . dt \quad \Rightarrow \int dx(t) = \int (\gamma_0 . t + V_0) . dt$

⇨ $x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + cte$ à $t = 0$: $x(t = 0) = \frac{1}{2}\gamma_0 \times 0 + V_0 \times 0 + cte = x_0$

⇨ $\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0}$

C'est l'équation horaire du mouvement **rectiligne uniformément varié**

III- Etude des mouvements usuels

❑ Pour un mouvement rectiligne uniformément varié, les équation horaires sont:

- $\gamma = \gamma_0 = cte$
- $V(t) = \gamma_0 . t + V_0$
- $x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + V_0 t + x_0$

Remarque 1:

- Si l'accélération et la vitesse ont même signe, le mouvement est **accéléré**: $\vec{\gamma}.\vec{V} > 0$
- S'ils sont de signes opposés, le mouvement est **retardé**: $\vec{\gamma}.\vec{V} < 0$

Remarque 2: **(Relation entre V et x)**

- $V(t) = \gamma_0 . t + V_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{V(t)-V_0}{\gamma_0}$
- $x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 \left(\frac{V(t)-V_0}{\gamma_0}\right)^2 + V_0 \left(\frac{V(t)-V_0}{\gamma_0}\right) + x_0$

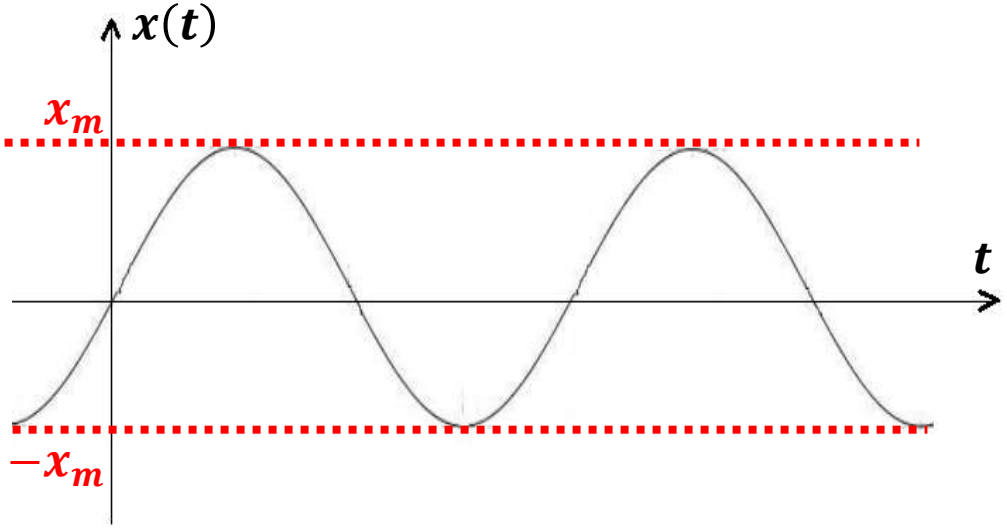
$$V^2 - V_0^2 = 2\gamma_0 (x - x_0)$$

III- Etude des mouvements usuels

- **c. Mouvement rectiligne sinusoïdal:**

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est une droite et si l'équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps.

Soit: $x(t) = x_m sin(\omega t + \varphi)$



- ✓ x_m:amplitude du mouvement
- ✓ $\omega = \frac{2\pi}{T}$: La pulsation (T: la période)
- ✓ $\omega t + \varphi$: la phase à l'instant t
- ✓ φ **:** la phase à l'origine (t=0)

- Le point M se déplace entre les positions: $-x_m$ et x_m
- $f = \frac{1}{T}$: La fréquence

- **La vitesse:** $V = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x_m sin(\omega t + \varphi))}{dt} = x_m \omega cos(\omega t + \varphi)$
- **L'accélération:** $\gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{d(x_m \omega cos(\omega t + \varphi))}{dt} = -x_m \omega^2 cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

III- Etude des mouvements usuels

2. Mouvement circulaire

- Il s'agit de l'étude d'un point matériel qui décrit un cercle de rayon **r= a** constant à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ quelconque.
- Il est grandement préférable de travailler en coordonnées polaires ($\rho = a$; θ)
- En étudie les cas suivants:

a. Cas général, mouvement non uniforme: ($r = a = cte$ et $\omega = \dot{\theta}$ variable)

$$\dot{r} = 0$$

❖ **Vecteur position:** $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{e_r}$

❖ **Vecteur vitesse:** $\vec{V}(M/R) = a.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire circulaire

❖ **Vecteur accélération:** $\vec{\gamma}(M/R) = -a.\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

III- Etude des mouvements usuels

❖ Composantes intrinsèques:

$\vec{u}_t$:étant un vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$\vec{u}_n$:étant un vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigée vers le centre.

- $\vec{e}_\theta = \vec{u}_t$
- $\vec{e}_r = -\vec{u}_n$

❑ $\left\|\vec{V}(M/R)\right\| = V = a.\dot{\theta} \longrightarrow V^2 = a^2\dot{\theta}^2 \rightarrow a.\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a}$

❑ $\frac{dV}{dt} = \frac{d(a.\dot{\theta})}{dt} = a\frac{d\dot{\theta}}{dt} = a\ddot{\theta}$

$\vec{V}(M/R) = a.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = a.\dot{\theta}.\vec{u}_t$ et $\vec{\gamma}(M/R) = a.\dot{\theta}^2\vec{u}_n + a\ddot{\theta}\vec{u}_t$

$a.\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a}$ $\quad a\ddot{\theta} = \frac{dV}{dt}$

d'où

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{V^2}{a}\vec{u}_n + \frac{dV}{dt}\vec{u}_t$$

✓ $\gamma_T = \frac{dV}{dt}$: composante tangentielle et $\gamma_N = \frac{V^2}{a}$: composante normale

III- Etude des mouvements usuels

b. Cas particulier , mouvement uniforme: ($r = a = cte$ et $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$)

$\dot{r} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$

a: le rayon

❖ **Vecteur position:** $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{e_r}$

❖ **Vecteur vitesse:** $\vec{V}(M/R) = a.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire circulaire

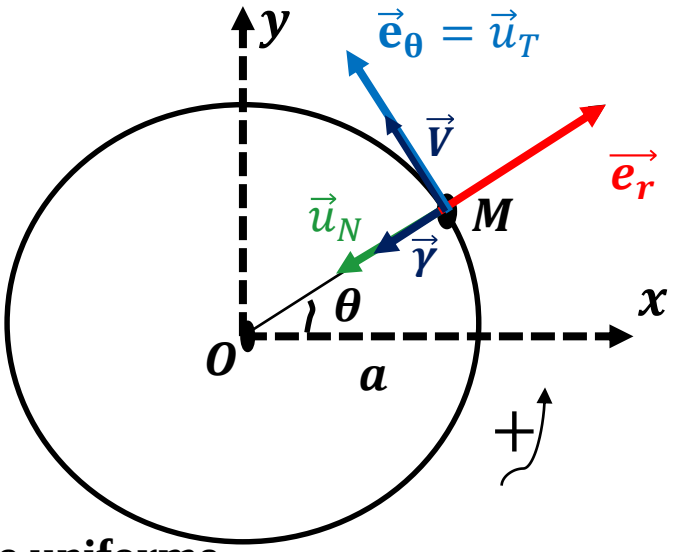
❖ **Vecteur accélération:** $\vec{\gamma}(M/R) = -a.\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$

❖ **L'équation horaire :** $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta(t) = \omega t + cte$

À $t = 0$: $\theta(t=0) = \omega \times 0 + cte = cte = \theta_0$

✓ θ_0 correspondant à l'abscisse angulaire à l'instant $t = 0$

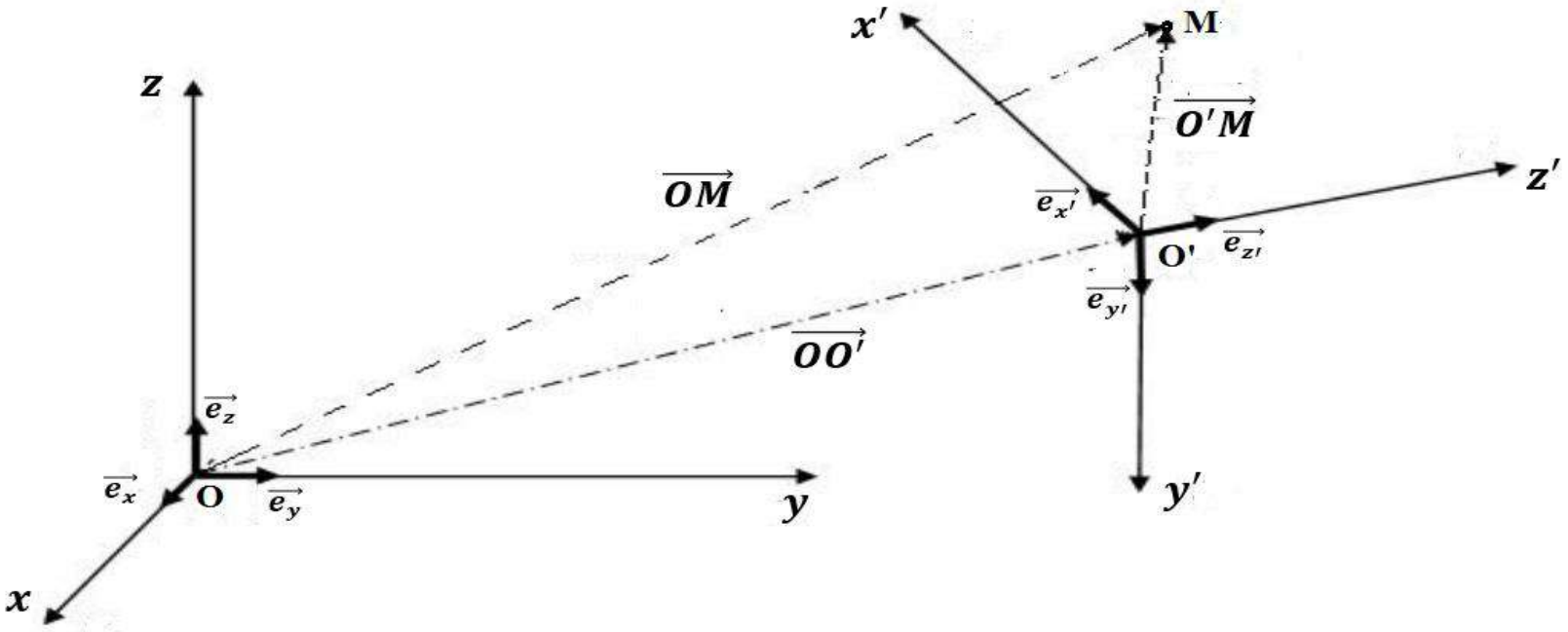
$$\theta(t) = \omega.t + \theta_0$$



C'est l'équation horaire angulaire du mouvement **circulaire uniforme**

IV-Mouvement relatif

- On considère deux repères $\boldsymbol{R}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ fixe (absolue) et $\boldsymbol{R'}$ $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}, \boldsymbol{z'})$ en mouvement (relatif).



- Le mouvement du mobile M par rapport au repère fixe $\boldsymbol{R}$ peut être défini par deux méthodes:
  - ✓ Projection directe du mouvement du point **M** dans $\boldsymbol{R}$
  - ✓ Projection du mouvement du point **M** dans $\boldsymbol{R'}$ puis dans $\boldsymbol{R}$

IV-Mouvement relatif

Méthode de dérivée directe

❑ La vitesse et l'accélération du mobile M par rapport au repère fixe (absolu) $\boldsymbol{R}$ et le repère mobile (relative) $\boldsymbol{R'}$ sont exprimés par :

- La vitesse absolue $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{a}}$: la vitesse du point **M** par rapport à $\boldsymbol{R}$:

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_R$$

- La vitesse relative $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$: la vitesse du point **M** par rapport à $\boldsymbol{R'}$:

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{R'}$$

- L'accélération absolue $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{a}}$: l'accélération du point **M** par rapport à $\boldsymbol{R}$:

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}|_R$$

- L'accélération relative $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}$: l'accélération du point **M** par rapport à $\boldsymbol{R'}$:

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{R'}$$

IV-Mouvement relatif

Composition des vitesses et d'accélérations

❖ Loi de composition des vitesses

- La vitesse absolue $\vec{V}_a$ est calculée par la dérivé du vecteur position par rapport au repère fixe R :

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_R = \frac{d\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}|_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|_R + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_R$$

Avec: $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}}$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|_R + \left.\frac{d\left(x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}}\right)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|_R + \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{e_{x'}} + x'\left.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right|_R + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{e_{y'}} + y'\left.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right|_R + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{e_{z'}} + z'\left.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right|_R$$

IV-Mouvement relatif

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big|_R + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\Big|_R + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\Big|_R + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\Big|_R + \frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\Big|_R$$

On pose : $\vec{V}_e$ et $\vec{V}_r$

- $\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\Big|_R + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\Big|_R + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\Big|_R + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\Big|_R$: représente **la vitesse d'entrainement** c'est-à-dire la vitesse du repère **R'** par rapport au repère **R**.
- $\vec{V}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\Big|_R$:c'est **la vitesse relative** c'est-à-dire la vitesse du mobile **M** par rapport au repère **R'**

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

IV-Mouvement relatif

❑ En étudie les cas suivants:

- **R' en translation par rapport à R:** $\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_{x'}}$; $\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_{y'}}$ et $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_{z'}}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right|_R = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R}$$

- **R' en rotation par rapport à R et sans translation ($O \equiv O'$):**

On suppose que le repère **R'** est en rotation par rapport à **R** suivant l'axe perpendiculaire (Oz).
donc le vecteur vitesse angulaire est porté par cet axe:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \omega.\overrightarrow{e_z}}$$

On sait que:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right|_R = \underbrace{\left.\frac{\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right|_{R'}}_{=0} + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{x'}} \rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{x'}}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right|_R = \underbrace{\left.\frac{\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right|_{R'}}_{=0} + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{y'}} \rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{y'}}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right|_R = \underbrace{\left.\frac{\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right|_{R'}}_{=0} + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{z'}} \rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{z'}}$$

IV-Mouvement relatif

$$\vec{V}_e = x'\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{x'}}\right) + y'\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{y'}}\right) + z'\left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{e_{z'}}\right)$$

$$\vec{V}_e = \left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge x'.\overrightarrow{e_{x'}}\right) + \left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge y'.\overrightarrow{e_{x'}}\right) + \left(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge z.\overrightarrow{e_{x'}}\right)$$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\left(x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}}\right)$$

$$\boxed{\vec{V}_e = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}}$$

IV-Mouvement relatif

❖ Loi de composition des accélérations

La loi de composition des accélérations s'écrit de la façon suivante:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

où :

- $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}\,(M/R) = \frac{d\vec{V}_a}{dt}|_R$: est **l'accélération absolue** du point matériel
- $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R') = \frac{d\vec{V}_r}{dt}|_{R'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{R'}$: est **l'accélération relative** du point matériel
- $\vec{\gamma}_e = \frac{d^2(\overrightarrow{OO'})}{dt^2}\Big|_R + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R)\wedge(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M})$: est **l'accélération d'entrainement**
- $\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}_r$: est **l'accélération de Coriolis** (l'accélération complémentaire)

IV-Mouvement relatif

❑ En étudie les cas suivants:

❖ **R' en translation par rapport à R:** $\vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0}$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\left(\overrightarrow{OO'}\right)}{dt^2}\right|_R \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_c = \vec{0}$$

❖ **R' en mouvement de rotation uniforme par rapport à R:** $\vec{\Omega} = \omega.\vec{e_z}$ $(\omega = cte)$

(sans translation $(O \equiv O')$)

- $\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge (\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})$
- $\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V}_r$

Chapitre III:

Dynamique du point matériel

I-Introduction

1. La dynamique

- La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent.

2. Quantité de mouvement

- Un mouvement ne dépend pas que de la vitesse mais aussi de sa masse.
  - Soit un point matériel $\boldsymbol{M}$ de masse **m** animé à l'instant $\boldsymbol{t}$ d'une vitesse $\vec{V}(M/R)$ dans un référentiel galiléen $\boldsymbol{R}$
  - La quantité de mouvement du point M est le vecteur: $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}.\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R}) = \vec{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{R})$

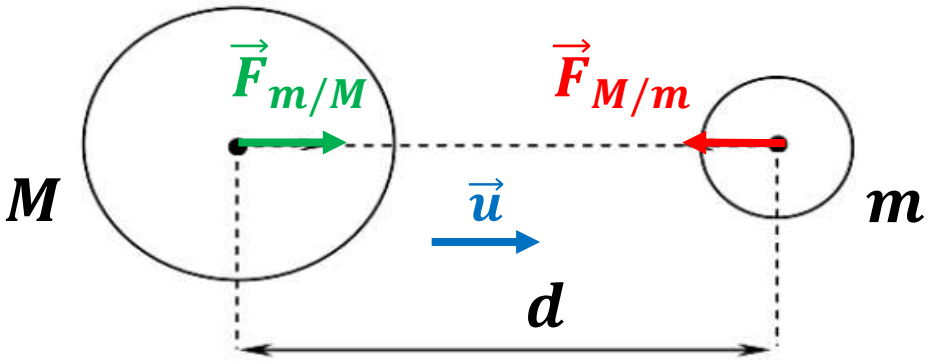
3. Forces exercées sur un point matériel

- Toute force peut être représentée par un vecteur ($\vec{\boldsymbol{F}}$) dont les quatre propriétés sont:
  - ✓ **Le point d'application** : point où l'action s'exerce sur le corps
  - ✓ **La direction** : droite selon laquelle l'action s'exerce
  - ✓ **Le sens** : sens selon lequel s'exerce l'action
  - ✓ **L'intensité** : est la valeur de la force en Newton (N)

I-Introduction

❖ Exemples des forces:

- **Forces gravitationnelles**: il existe une force gravitationnelle entre deux masse $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{M}$ distant de $\boldsymbol{d}$.



$\vec{u}$: Vecteur unitaire

- $F_{M/m} = F_{m/M} = G.\frac{m.M}{d^2}$
- $\vec{F}_{M/m} = -G\frac{m.M}{d^2}\vec{u}$
- $\vec{F}_{m/M} = G\frac{m.M}{d^2}\vec{u}$

$G = 6,672.10^{-11}$ **(S. I)** : est la constante d`attraction universelle

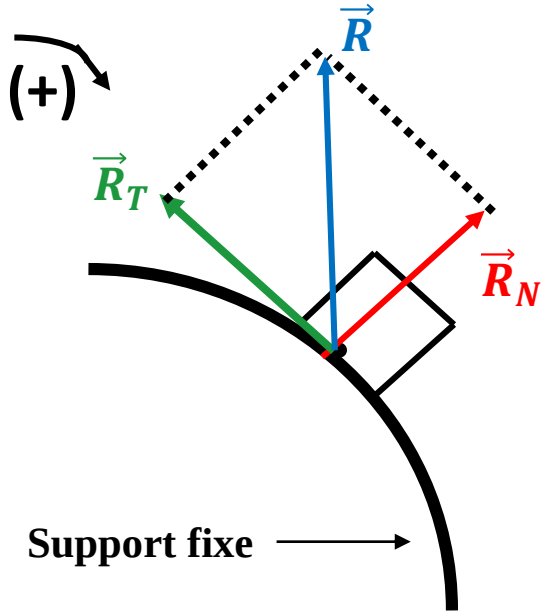
Remarque:

Un cas important est celui où la masse $\boldsymbol{M}$ est la masse de la terre et où $\boldsymbol{m}$ est la masse d'un objet au voisinage de la surface de la terre. La force gravitationnelle est le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ (force de pesanteur), c 'est une force centrale toujours dirigée vers le centre de la terre.

I-Introduction

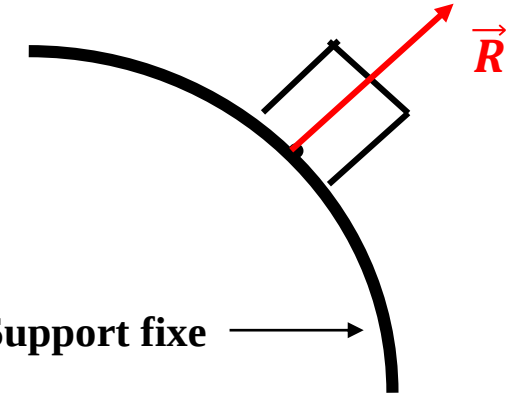
- **Forces de contact** : forces d'interactions entre deux corps en contact.

1. Réaction d'un support



Contact avec frottement:

$\vec{R}_T \neq \vec{0}$ *et* $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$



Contact sans frottement:

$\vec{R}_T = \vec{0}$ *et* $\vec{R}_N = \vec{R}$

❑ la réaction du support se décompose en :

✓ Une réaction normale au support $\vec{R}_N$ qui empêche le solide de s'enfoncer.

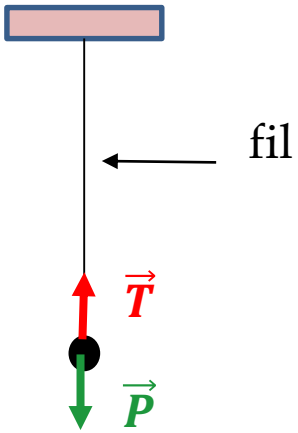
✓ Une force parallèle à la surface du support, résultantes des forces de **frottement** $\vec{R}_T = \vec{f}$

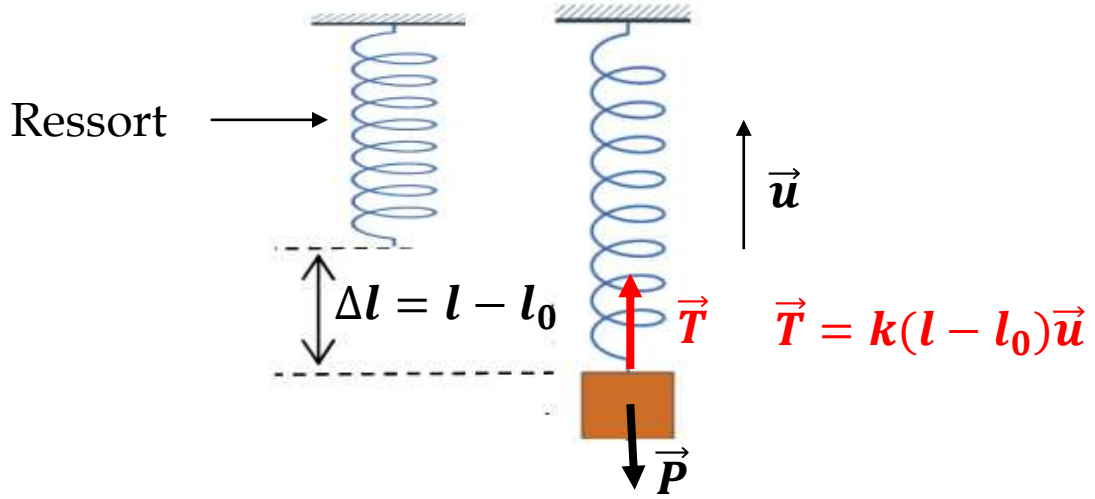
- La force de frottement est toujours opposée au mouvement.

I-Introduction

2.Forces de tension

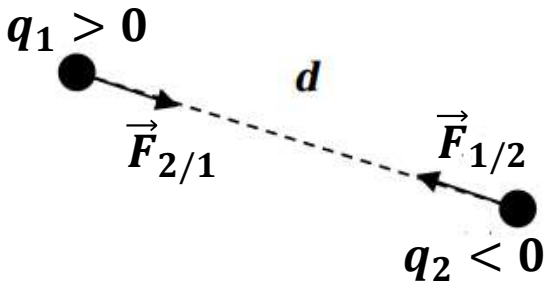
Sont les forces qui tirent sur un élément d'un corps : tension du fil $\vec{T}$, tension du ressort.





Avec, l_0 la longueur du ressort à vide, l la longueur du ressort et k la constante de raideur du ressort (N/m).

❖ **Autres forces:**



✓ **Force électrique** : C'est une force qui apparaît entre deux charges q_1 et q_2 séparées l'une de l'autre par une distance d.

✓ **Forces magnétiques,…**

II- Lois de Newton

❖ 1. Principe d'inertie (1ère loi de NEWTON)

❑ Dans un **référentiel Galiléen**, tout corps **isolé** qui n'est soumis à aucune force reste au repos ou en **mouvement rectiligne uniforme**.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V} = \vec{0} \longrightarrow \text{(au repos)} \\ ou\ \vec{V} = \overrightarrow{cte} \longrightarrow \text{(mouvement rectiligne uniforme } \vec{\gamma} = \vec{0}\text{)} \end{cases}$$

Remarque :

- Tout référentiel où le principe d'inertie est applicable est **un référentiel Galiléen.**
- Tout référentiel absolu (fixe) est un référentiel Galiléen.
- Tout référentiel relatif en **translation rectiligne uniforme** par rapport au référentiel absolu est **Galiléen**. L'accélération d'entrainement est nulle dans ce cas.
- Tout référentiel relatif en translation **rectiligne non uniforme** ou en **rotation** par rapport au référentiel absolu est **non Galiléen**. Dans ce cas, l'accélération d'entrainement n'est pas nulle.

II- Lois de Newton

❖ 2. Principe fondamental de la dynamique (PFD) (2ème loi de Newton)

❑ Dans un référentiel **Galiléen** la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel **M** est égale au produit du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ et de la masse **m** du point matériel.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/R)$$

Remarque :

- Le PFD peut s'écrire : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement: $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{dm\vec{V}(M/R)}{dt}$

➢ Si la masse m est constante, alors: $\sum \vec{F}_{ext} = m.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = m\vec{\gamma}(M/R)$

II- Lois de Newton

❑ PFD dans un référentiel non Galiléen :

On suppose un mobile M de masse $\boldsymbol{m}$ en mouvement dans un repère $\boldsymbol{R'(o', x', y', z')}$ (relatif), lui même en mouvement par rapport à un repère $\boldsymbol{R(o, x, y, z)}$ fixe (absolue).

- En appliquant le PFD dans le repère absolu $\boldsymbol{R}$,

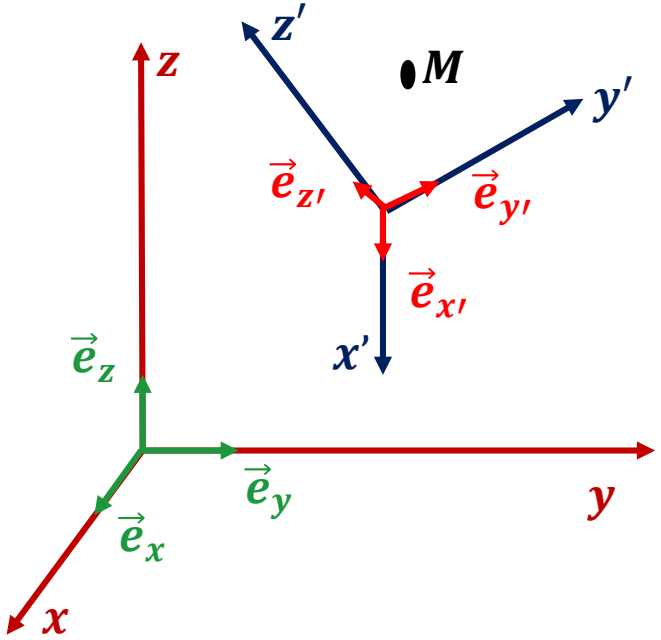
On aura :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_a = m(\vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c)$$

- Si on cherche à appliquer le PFD dans le repère relatif $\boldsymbol{R'}$,

On aura:

$$\sum \vec{F}_{ext} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c = m\vec{\gamma}_r$$



$\vec{\gamma}_e$, $\vec{\gamma}_r$ et $\vec{\gamma}_c$ sont respectivement l'accélération d'entrainement, l'accélération relative, et l'accélération de Coriolis.

II- Lois de Newton

- Le principe fondamental de la dynamique reste valable dans les repère non galiléens à condition d'ajouter la force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$ et la force d'inertie de coriolis $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$ aux forces qui agissent sur le mobile pour le mettre en mouvement.

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{\gamma}_r$$

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R')$$

II- Lois de Newton

❖ 3. Principe d'action et de la réaction (3ème loi de Newton)

❑ Lorsque deux corps A et B sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées en sens mais égale en intensité

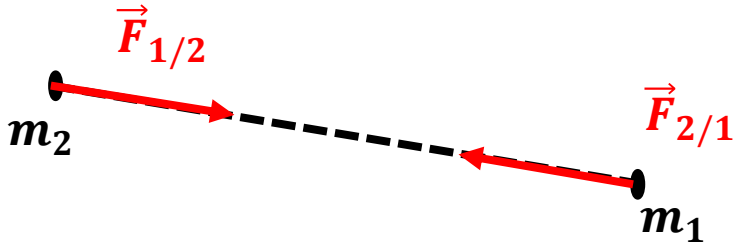
$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Exemple :

- **Force de gravitation universelle**

$$F_{1/2} = F_{2/1} = G.\frac{m_1.m_2}{d^2}$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

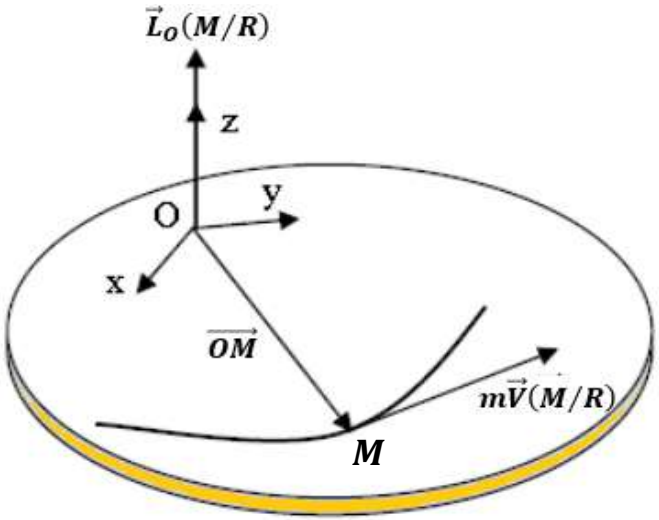


III- Théorème du moment cinétique

1. Moment cinétique d'un mobile en un point O dans un référentiel R

- Soit une particule de masse **m** se trouvant en un point repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et se déplace à la vitesse $\vec{V}(M/R)$. Le moment cinétique d'une particule en **O** dans **R** est :

$$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

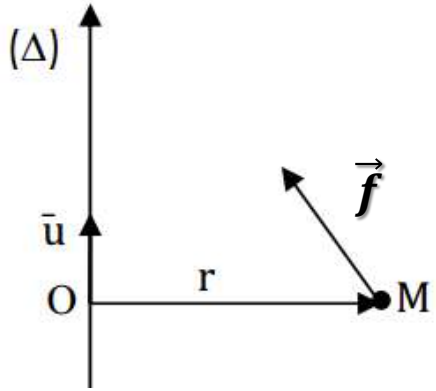


Où : $\vec{p} = m\vec{V}(M/R)$ vecteur quantité de mouvement

$\vec{L}_O(M/R)$ est un vecteur perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{OM}, \vec{p})$.

2.Moment dynamique d'une force $\vec{f}$ en un point O

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$



III- Théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

- Dans un référentiel Galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point ***M*** par rapport au point fixe **O** du référentiel Galiléen ***R*** est égale au moment de la résultante des forces extérieures appliquées sur **M**

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext})$$

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_{ext}$$

Preuve:

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Avec:

- $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}(M/R)$
- $\vec{p} = m\vec{V}(M/R)$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{V}(M/R) \wedge m.\vec{V}(M/R) = \mathbf{0}$$

d'où:

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext})$$

III- Théorème du moment cinétique

d'où: $\boxed{\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})}$

Exemple: mouvement à force central

- Une force s'applique en un point **M** est dite **centrale** lorsque son support passe constamment par un point fixe **O,** et le module de cette force ne dépend que de la distance r de M au point **O.**

- Moment dynamique de la force $\vec{F}(r)$ en O:

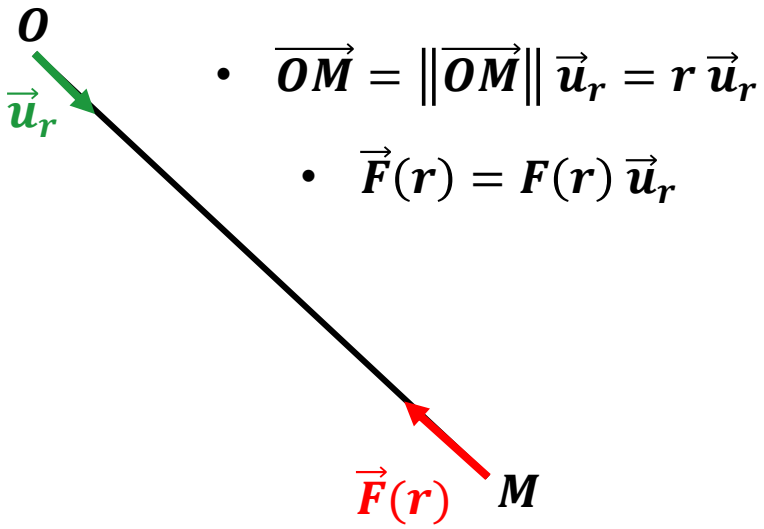
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(r)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = r\,\vec{u}_r \wedge F(r)\,\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = r\,F(r)\,\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \mathbf{0}$$

- Moment cinétique de la force $\vec{F}(r)$ en O:

$$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$



- $\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|\,\vec{u}_r = r\,\vec{u}_r$
- $\vec{F}(r) = F(r)\,\vec{u}_r$

III- Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

Avec:

- $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$
- $\vec{V}(M/R) = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$

$$\vec{L}_O(M/R) = r\,\vec{u}_r \wedge m\left(\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{L}_O(M/R) = r\vec{u}_r \wedge m\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r\vec{u}_r \wedge mr.\dot{\theta}.u$$

Or: $\vec{u}_r \wedge \overrightarrow{u_r} = \vec{O}$ et: $u_r \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \vec{u}_z$

D'où : $\vec{L}_O(M/R) = \mathrm{m}\dot{\theta}r^2\vec{u}_z$

III- Théorème du moment cinétique

Application:

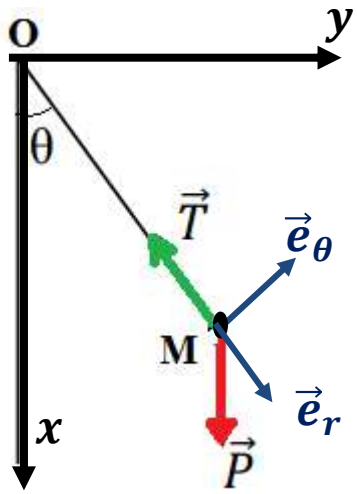
On écarte de sa position d'équilibre ($\theta = 0$) une masse ponctuelle $\boldsymbol{m}$ suspendue à un fil inextensible de longueur $\boldsymbol{r} = \|\overrightarrow{OM}\| = \mathbf{1}$. On repère la position de la masse **m** par l'angle **θ** entre la verticale et la direction du fil.

- Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

1. Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Galiléen $\boldsymbol{R}\ (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{xyz})$ (utiliser le système des Coordonnées polaires).

2. Le théorème du moment cinétique.

(pour des faibles oscillations: $\boldsymbol{sin\theta} \approx \boldsymbol{\theta}$)



Correction:

- Les forces appliquées sont : tension du fil $\vec{\boldsymbol{T}}$ et le poids $\vec{\boldsymbol{P}}$.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M/R})$

$$\vec{\boldsymbol{P}}+\vec{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M/R})$$

L'accélération dans les coordonnées polaires d'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{M/R}) = \left(\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}.\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{2}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + \left(\mathbf{2}\dot{\boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{r}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right)\vec{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

III- Théorème du moment cinétique

Dans ce cas, nous avons : $r = 1 \quad \rightarrow \dot{r} = 0 \quad et\ \ddot{r} = 0$

Donc: $\vec{\gamma}(M/R) = -r.\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

- Projection sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

$$-T + mgcos\theta = -m\,r.\dot{\theta}^2$$

et

$$-mg\,sin\theta = m\,r\,\ddot{\theta}$$

$sin\theta \approx \theta$ (pour θ est faible) $\longrightarrow$ $-mg\,\theta = m\,r\,\ddot{\theta}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0}$

2. En appliquant le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext})$

- $\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$ Avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

La vitesse en coordonnées polaire est : $\vec{V}(M/R) = \dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ avec $(\dot{r} = 0)$

$\longrightarrow$ $\vec{V}(M/R) = r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$

III- Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_O(M/R) = r\,\vec{e}_r \wedge m\,r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \longrightarrow \vec{L}_O(M/R) = \mathrm{m}\dot{\theta}r^2\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\mathrm{m}\,\dot{\theta}\,r^2\vec{e}_z\right)}{dt} = m\,r^2\,\frac{d\left(\dot{\theta}\vec{e}_z\right)}{dt} = m\,r^2\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\frac{d\vec{e}_z}{dt}\Big|_R\right)$$

$\frac{d\vec{e}_z}{dt}\Big|_R = 0$

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = mr^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z \qquad (1)$$

- Comme on a deux forces, donc on aura deux moments de force:

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = r\,\vec{e}_r \wedge -T\,\vec{e}_r = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = r\,\vec{e}_r \wedge -mg\,sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

Car: $\vec{e}_r \wedge \vec{e_r} = \vec{0}$ $\longrightarrow$ $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mgr\,sin\theta\,\vec{e}_z$

III- Théorème du moment cinétique

Donc: $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mgr\,sin\theta\,\vec{e}_z$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext}) = -mgr\,sin\theta\,\vec{e}_z \qquad (2)$$

le théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{ext}) \longrightarrow (1) = (2)$

$$mr^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z = -mgr\,sin\theta\,\vec{e}_z \longrightarrow r\ddot{\theta} = -g\,sin\theta$$

$sin\theta \approx \theta$ (pour θ est faible) $\longrightarrow r\,\ddot{\theta} = -g\theta$

D'où: $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{r}\theta = 0$

Chapitre IV:

Travail et énergie

I-Puissance et travail d'une force

- Soit **M** un point matériel de masse **m** repéré dans le référentiel $\boldsymbol{R(Oxyz)}$ tel que: $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}}$. Ce point **M** soumis à l'action de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ effectue un déplacement élémentaire: $\boldsymbol{d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}}$

1.Puissance d'une force:

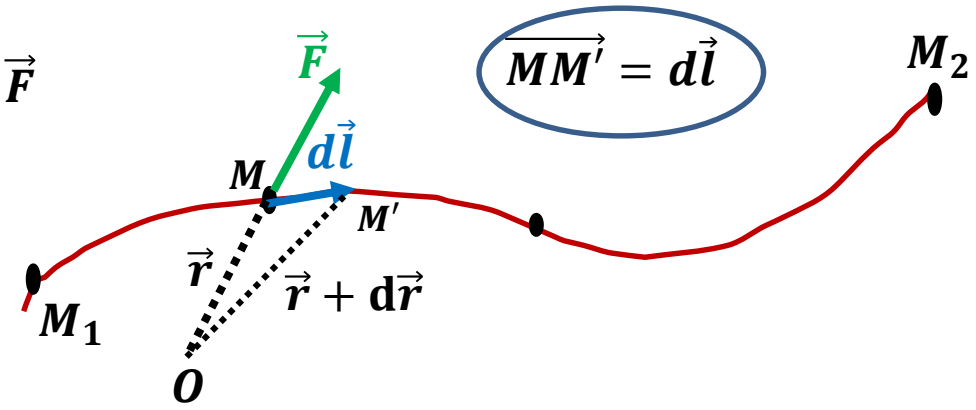
- La puissance **P** d'une force $\vec{\boldsymbol{F}}$ appliqué sur un point matériel $\boldsymbol{M}$ animée d'une vitesse $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M/R})$ dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ est: $\boldsymbol{P = \vec{F}.\vec{V}(M/R)}$

2.Travail élémentaire

- Le travail élémentaire $\boldsymbol{\delta w}$ de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ entre les instants $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t + dt}$ est:

$$\boldsymbol{\delta w = P.dt = \vec{F}.\vec{V}(M/R).dt}$$

Avec: $\vec{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{M/R}) = \dfrac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt}}$



$$\boldsymbol{\delta w = \vec{F}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}}$$

I-Puissance et travail d'une force

❖ Dans le Système de coordonnées cartésiennes:

$$\vec{F}\begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \end{cases} \quad \text{et} \quad d\overrightarrow{OM}\begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases} \Rightarrow \delta w = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

❖ Dans le Système de coordonnées polaires:

$$\vec{F}\begin{cases} F_\rho \\ F_\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\begin{cases} d\rho \\ \rho d\theta \end{cases} \Rightarrow \delta w = F_\rho.d\rho + F_\theta.\rho d\theta$$

❖ Dans le Système de coordonnées cylindriques:

$$\vec{F}\begin{cases} F_\rho \\ F_\theta \\ F_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\begin{cases} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{cases} \Rightarrow \delta w = F_\rho.d\rho + F_\theta.\rho d\theta + F_z dz$$

I-Puissance et travail d'une force

3. Travail d'une force constante:

Le travail d'une force constante du point M_1 vers un autre M_2 s'écrit :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta w = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}\int_{M_1}^{M_2} d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$$

Donc, le travail dépend de la différence entre les deux positions et non pas de la forme de la trajectoire suivie.

Remarque:

Le travail peur être positif, négatif ou nul:

$$W_{A \to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2} = F.M_1M_2.cos\theta \quad \text{avec} \quad \theta = \left(\vec{F}, \widehat{\overrightarrow{M_1M_2}}\right)$$

- Si $cos\theta > 0 \rightarrow W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) > 0$, c'est un travail **moteur**
- Si $cos\theta < 0 \rightarrow W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) < 0$, c'est un travail **Résistant**
- Si $cos\theta = 0 \rightarrow W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = 0$, c'est un travail **nul**

II-Théorème de l'énergie cinétique

1. L'énergie cinétique :

- L'énergie cinétique est l'énergie que requiert le point **M** lors de son mouvement. Elle est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2$$

V étant le module de la vitesse de M dans le référentiel R

2. Théorème de l'énergie cinétique :

- Considérons un point matériel **M** en mouvement dans un référentiel **R**, soumis à plusieurs forces $\vec{f}_i$ dont la résultante est $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$ telle que:

$$\vec{F} = m.\vec{\gamma} = \mathbf{m}.\frac{d\vec{V}}{dt}$$ (Principe fondamentale de la dynamique)

- La variation de l'énergie cinétique: $dE_c = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = m\vec{V}.d\vec{V} = m\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}dt$

$$dE_c = \vec{F}.\vec{V}.dt$$ Avec: $P = \vec{F}.\vec{V}$ (la puissance)

$$dE_c = P.dt \quad \Rightarrow \quad P = \frac{dE_c}{dt}$$

II-Théorème de l'énergie cinétique

- Ce qui nous permet d'écrire le travail élémentaire: $\delta w = P.dt = \frac{dE_c}{dt}.dt$

d'où le théorème de l'énergie cinétique: $\delta w = dE_c$

- Entre deux instants t_1 et t_2 (deux positions $M_1(\vec{V}_1)$ et $M_2(\vec{V}_2)$):

$$\int_{M_1}^{M_2} \delta w = \int_{V_1}^{V_2} dE_c = E_{C2} - E_{C1}$$

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = E_{C2} - E_{C1}$$ (**Théorème de l'énergie cinétique**)

Entre deux instant t_1 et t_2, et dans un référentiel galiléen, la somme des travaux des forces appliquées au point M est égale à la variation de l'énergie cinétique de ce point matériel.

III-Energie potentielle et énergie mécanique

Force conservatrice:

- Dans certains cas, le travail total effectué par la force, lorsque la particule se déplace de M_1 à M_2 est indépendant du trajet suivi. Donc dans ce cas, on dit que la force $\vec{F}$ est **conservatrice**, où $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_P, telle que:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P \qquad \text{Où:} \qquad dE_P = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

$$dE_P = -\delta w(\vec{F}) \qquad \int_1^2 -dE_P = \int_1^2 \delta w(\vec{F})$$

$$E_{P1} - E_{P2} \qquad W_{M_1 \to M_2}(\vec{F})$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique $W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = E_{C2} - E_{C1}$

D'où: $E_{P1} - E_{P2} = E_{C2} - E_{C1}$ ⇒ $E_{P1} + E_{C1} = E_{P2} + E_{C2} = E_m$

- L'énergie mécanique du point matériel est: $E_m = E_P + E_C$

E_c: est l'énergie cinétique E_P: est l'énergie potentielle

III-Energie potentielle et énergie mécanique

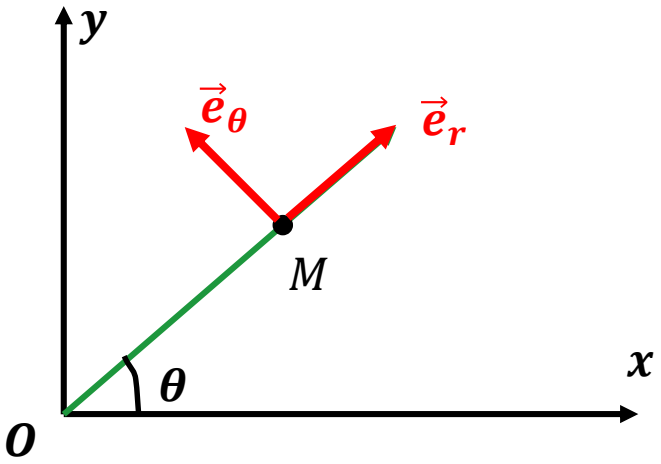
Application:

Une particule de masse m est en mouvement sous l'action de la force: $\vec{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$

α étant une constante positive.

Calculer en coordonnées polaires (r, θ):

1. l'énergie cinétique E_c de la particule
2. L'énergie potentielle E_P
3. L'énergie mécanique (énergie totale) E
4. Le moment cinétique $\vec{L}_O(M/R)$ par rapport à O



III-Energie potentielle et énergie mécanique

Correction:

1. **L'énergie cinétique E_c:** $E_C = \frac{1}{2}mV^2$ avec $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Or en coordonnées polaires (r, θ): $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}.\vec{e_r} + r.\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

$$V = \|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2}$$

D'où: $$E_C = \frac{1}{2}m\sqrt{\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2\right)$$

2. **L'énergie potentielle E_P:**

La particule est soumise à la force : $\vec{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$, on a donc:

$$dE_P = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM} \quad \rightarrow \quad E_P = -\int \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

III-Energie potentielle et énergie mécanique

Avec $\overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$:déplacement élémentaire en coordonnées polaires

D'où: $$E_P = -\int \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r.(dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = -\int \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r\,dr\,\overrightarrow{e_r} - \int \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_r}=1$ $\qquad$ $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_\theta}=0$

$$E_P = -\int \frac{\alpha}{r^2}\,dr \quad \rightarrow E_P = \frac{\alpha}{r} + cte$$

En supposant $E_P = 0$ pour $r \rightarrow \infty$: $\quad E_{P\ (r\rightarrow\infty)} = 0 + cte = 0 \quad \rightarrow cte = 0$

$$\boxed{E_P = \frac{\alpha}{r}}$$

3. L'énergie mécanique E :

$$\boxed{E = E_P + E_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2\right) + \frac{\alpha}{r}}$$

III-Energie potentielle et énergie mécanique

3. **Le moment cinétique $\vec{L}_O(M/R)$ par rapport à O:**

$$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$$

Où : $\vec{p} = m\vec{V}(M/R)$ vecteur quantité de mouvement

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O(M/R) = r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O(M/R) = r\vec{e}_r \wedge m\dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r\vec{e}_r \wedge mr.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$

Or: $\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{e_r} = \vec{O}$ et: $\vec{e}_r \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \vec{e}_z$

D'où :

$$\boxed{\vec{L}_O(M/R) = \mathrm{m}\, r^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_z}$$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage