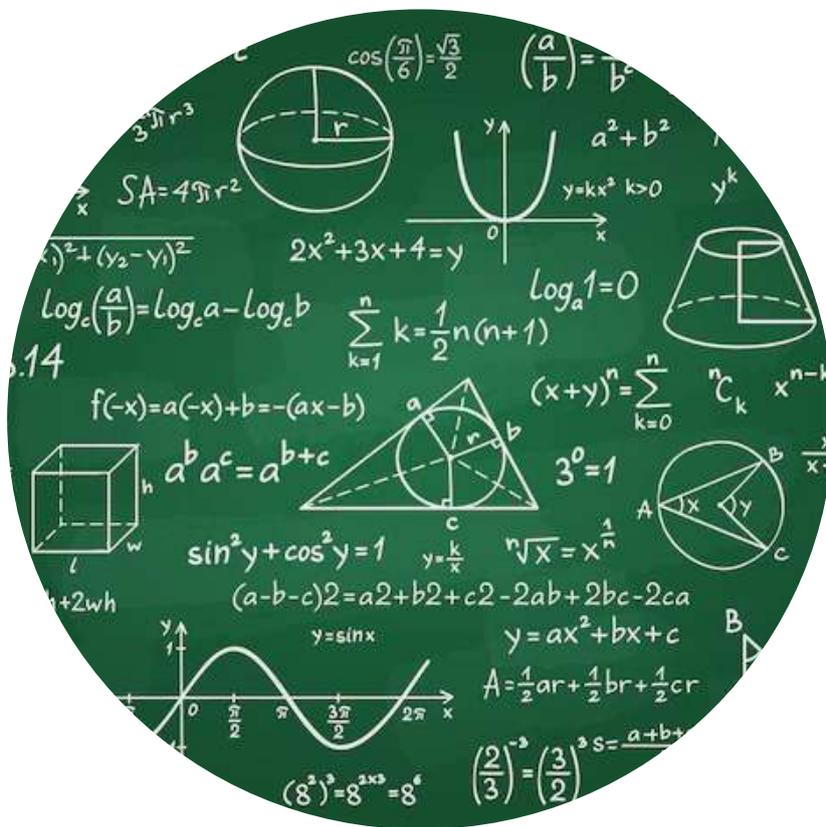


Algèbre



Shop

- Cahiers de Biologie + Lexique
- Accessoires de Biologie



Etudier

Visiter [Biologie Maroc](http://www.biologie-maroc.com) pour étudier et passer des QUIZ et QCM en ligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.



Emploi

- CV • Lettres de motivation • Demandes...
- Offres d'emploi
- Offres de stage & PFE

Exercices : Fractions rationnelles

Exercice 1

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions suivantes:

$$1) F = \frac{X^3 + 3X - 1}{(X^2 + 2X + 2)(X - 3)} \quad 2) G = \frac{X}{X^2 - 4} \quad 3) H = \frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$$

CORRECTION	INDICATIONS
------------	-------------

Exercice 2

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions suivantes:

$$1) F = \frac{X^4 + X^3 + 1}{X(X - 1)^4} \quad 2) G = \frac{X^7 + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)} \quad 3) H = \frac{3X^5 + 2X^4 + X^2 + 3X + 2}{X^4 + 1}$$

CORRECTION	INDICATIONS
------------	-------------

Exercice 3

Décomposer la fraction rationnelle suivante sur $\mathbb{C}(X)$, puis sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\frac{1}{X^{2n} + 1}$$

CORRECTION	INDICATIONS
------------	-------------

Indications pour l'exercice 1

1. Mettre F sous la bonne forme d'abord !
2. Aucune difficulté
3. Effectuer des divisions euclidiennes successives

RETOUR AUX ENONCES

Indications pour l'exercice 2

1. Pas de difficultés
2. Mettre G sous la bonne forme d'abord !
3. Mettre H sous la bonne forme d'abord, puis décomposer $X^4 + 1$ en produits de polynômes irréductibles. On pensera à vérifier la parité.

RETOUR AUX ENONCES

Correction de l'exercice 1

1. Calculons d'abord le degré de F : il est égal à 0. F n'est donc pas mise sous la bonne forme. Nous devons effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

On a $(x^2 + 2x + 2)(x - 3) = x^3 - x^2 - 4x - 6$. La division euclidienne donne:

$$x^3 + 3x - 1 = (x^3 - x^2 - 4x - 6) + (5 + 7x + x^2)$$

$$\text{Donc } F = 1 + \frac{(5 + 7x + x^2)}{(x^2 + 2x + 2)(x - 3)}$$

Nous devons maintenant décomposer $\frac{(5 + 7x + x^2)}{(x^2 + 2x + 2)(x - 3)}$. On cherche a, b, c tels que:

$$\frac{(5 + 7x + x^2)}{(x^2 + 2x + 2)(x - 3)} = \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{c}{x - 3}$$

En effet, dans \mathbb{R} , le polynôme $(x^2 + 2x + 2)$ est irréductible.

- Calcul de c : On utilise la méthode de multiplication-évaluation: on trouve $c = \frac{35}{17}$
- Calcul de a : On utilise la méthode de la limite:

$$x \frac{(5 + 7x + x^2)}{(x^2 + 2x + 2)(x - 3)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } x \left(\frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{c}{x - 3} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c + a.$$

$$\text{Donc } 1 = c + a \Rightarrow a = -\frac{18}{17}$$

- Calcul de b : On utilise la méthode de la valeur: En prenant $x = 0$, on obtient: $\frac{5}{-6} = \frac{b}{2} - \frac{c}{3}$
D'où $b = -\frac{5}{17}$

Finalement:

$$F = 1 + \frac{-5 - 18x}{17(x^2 + 2x + 2)} + \frac{35(x - 3)}{17}$$

2. Le degré de G est strictement négatif, G est donc sous la bonne forme.
Les racines de $X^2 - 4$ sont 2 et -2 , on cherche donc a et b tels que :

$$G = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$$

On calcule ces 2 valeurs par multiplication-évaluation, on trouve $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

Remarque: On voit que G est impaire, on peut donc, en écrivant $G(-X) = G(X)$ trouver que $a = b$, ce qui ne nous fait plus qu'un seul calcul à faire.

3. On est dans la situation du cours suivante: $\frac{P}{Q^n}$, où Q est irréductible. On sait qu'il faut effectuer des difficultés euclidiennes successives de P par Q .

On a, par une première division euclidienne: $x^7 + 3 = (x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 5)(x^2 + x + 2) + (13 + 7x)$

Donc

$$H = \frac{x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 5}{(x^2 + x + 2)^2} + \frac{13 + 7x}{(x^2 + x + 2)^3}$$

Comme $\frac{13 + 7x}{(x^2 + x + 2)^3}$ est un élément simple, on poursuit le travail en divisant $x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 5$ par $(x^2 + x + 2)$

On a $x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 5 = (x^3 - 2x^2 - x + 8)(x^2 + x + 2) + (-21 - 7x)$. Donc

$$H = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 8}{(x^2 + x + 2)} + \frac{-21 - 7x}{(x^2 + x + 2)^2} + \frac{13 + 7x}{(x^2 + x + 2)^3}$$

On a $x^3 - 2x^2 - x + 8 = (x - 3)(x^2 + x + 2) + 14$; Donc

$$H = (x - 3) + \frac{14}{(x^2 + x + 2)} + \frac{-21 - 7x}{(x^2 + x + 2)^2} + \frac{13 + 7x}{(x^2 + x + 2)^3}$$

Ce qui est bien une décomposition en éléments simples.

RETOUR AUX ENONCES

Correction de l'exercice 2

1. Le degré de F est bien strictement négatif. Ecrivons ce que l'on doit obtenir:

$$F = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} + \frac{e}{(x-1)^4}$$

- Calcul de a et e par multiplication-évaluation: On obtient $a = 1$ et $e = 3$
- Calcul de b par la méthode de la limite: On a d'une part $xF \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $xF \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b + a$.

Donc $b = 0$.

- Calcul de d : On peut écrire que $F - \frac{e}{(x-1)^4} = \frac{a}{x} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$, calculer $F - \frac{e}{(x-1)^4}$ et en déduire d par multiplication-évaluation.

$$F - \frac{3}{(x-1)^4} = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x - 1}{x(x-1)^3}, \text{ ainsi } d = 4$$

- Calcul de c : par la méthode de la valeur, on prend $x = 2$ et on obtient $\frac{25}{2} = \frac{a}{2} + c + d + e = c + \frac{1}{2} + 7$.
Donc $c = 5$.

Finalement

$$F = \frac{1}{x} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^4}$$

2. Le degré de G n'est pas strictement négatif, mettons G sous la bonne forme par une division euclidienne:

Le dénominateur vaut $D = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, d'où:

$$X^7 + 1 = (X^3 - X^2 - X + 2)D + (-1 - 2X^2 - X)$$

Ainsi

$$G = X^3 - X^2 - X + 2 + \frac{-1 - 2X^2 - X}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)}$$

Il nous reste à calculer des réels a, b, c, d tels que

$$\frac{-1 - 2X^2 - X}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)} = \frac{aX + b}{X^2 + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

Ceci peut se faire de la façon suivante:

- Appliquons la méthode de la multiplication-évaluation en multipliant à droite et à gauche par $X^2 + 1$ et en évaluant en i ; on trouve:

$$\frac{1 - i}{i} = ai + b \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont des réels}$$

- Appliquons la méthode de la limite:

$$X \left(\frac{-1 - 2X^2 - X}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0 \\ \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} a + c \end{array}$$

d'où $c = 1$.

- Méthode de la valeur: on prend $X = 0$, et on trouve $-1 = b + d$, d'où $d = 0$
D'où

$$G = X^3 - X^2 - X + 2 + \frac{-1 - X}{X^2 + 1} + \frac{X}{X^2 + X + 1}$$

3. Mettons d'abord H sous la bonne forme.

$$3X^5 + 2X^4 + X^2 + 3X + 2 = (3X + 2)(X^4 + 1) + X^2, \text{ donc}$$

$$H = 3X + 2 + \frac{X^2}{X^4 + 1}$$

Posons $J = \frac{X^2}{X^4 + 1}$: Nous devons décomposer J .

De plus, $X^4 + 1$ n'est pas décomposé en produits de produits irréductibles:

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)$$

On cherche donc des réels a, b, c, d tels que:

$$J = \frac{X^2}{X^4 + 1} = \frac{X^2}{(X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)} = \frac{aX + b}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{cX + d}{X^2 - X\sqrt{2} + 1}$$

- Remarquons que $J(X) = J(-X)$, donc

$$\frac{aX + b}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{cX + d}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} = \frac{-aX + b}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{-cX + d}{X^2 + X\sqrt{2} + 1}$$

Ainsi, on a $\begin{cases} c = -a \\ b = d \end{cases} \quad (1)$

- Méthode de la valeur : en prenant $X = 0$, on obtient $0 = b + d$. Donc $b = d = 0$

En prenant $X = 1$, on obtient: $\frac{1}{2} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} + \frac{c}{2 - \sqrt{2}}$ (2).

Les relations (1) et (2) donnent donc $a = -c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Donc

$$H = 3X + 2 - \frac{X}{2\sqrt{2}(X^2 + X\sqrt{2} + 1)} + \frac{X}{2\sqrt{2}(X^2 - X\sqrt{2} + 1)}$$

RETOUR AUX ENONCES

Bon courage



LIENS UTILES 🙌

Visiter :

1. <https://biologie-maroc.com>

- Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. <https://biologie-maroc.com/shop/>

- Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
- Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
- Trouver des bourses et des écoles privées

3. <https://biologie-maroc.com/emploi/>

- Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
- Trouver des offres d'emploi et de stage

