Solution série 1

Exercice 1. Soient A et B 2événements tels que :

$P(A) = 0.4;\ P(A \cup B) = 0.7;\ et\, P(B) = p.$

a) A et B sont indépendants$\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mais :

$0.7 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$

$0.4 + p - 0.4p = 0.4 + 0.6p$. D'où $p = 0.5$

b) A et B sont incompatibles$\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$. Mais :

$0.7 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) =$

$0.4 + p$. D'où $p = 0.3$

Exercice 2.

Considérons les événements $L_1 =$"la $1^{ière}$ ligne est libre" , $L_2 =$"la $2^{ième}$ ligne est libre" et $A =$"Une seule ligne est libre". On a :

$P(\overline{L_1}) = 0.7$, $P(\overline{L_2}) = 0.5$, $P(\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) = 0.3$ et $A = (\overline{L_1} \cap L_2) \cup (L_1 \cap \overline{L_2})$. D'où $P(A) = P((\overline{L_1} \cap L_2) \cup (L_1 \cap \overline{L_2})) = P(\overline{L_1} \cap L_2) + P(L_1 \cap \overline{L_2})$; mais :

$P(\overline{L_1} \cap L_2) = P(L_2) - P(L_1 \cap L_2)$ et $P(L_1 \cap \overline{L_2}) = P(L_1) - P(L_1 \cap L_2)$. Donc $P(A) = P(L_2) + P(L_1) - 2P(L_1 \cap L_2)$. Or $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, par suite :

$P(L_1 \cap L_2) = P(\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}) = 1 - P(\overline{L_1} \cup \overline{L_2}) = 1 - P(\overline{L_1}) - P(\overline{L_2}) + P(\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) = 1 - 0.7 - 0.5 + 0.3 = 0.1$. D'où $P(A) = 0.3 + 0.5 - 2 * 0.1 = 0.6$.

Exercice 3.

L'espace fondamental correspondant à l'expérience "naissance de 2 enfants" est $\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$. On a $P(GG) = P(GF) = P(FG) = P(FF) = \dfrac{1}{4}$.

Notons $A =$"la famille a 2 garccons"$= \{GG\}$, $B =$"la famille a aumoins un garçon"$= \{GG, GF, FG\}$ et $C =$"L'aîné de la famille est un garçon"$= \{GG, GF\}$. On a $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$, et $P(C) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

a) Il s'agit ici de calculer $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

b) Il s'agit ici de calculer $P(A/C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4.

Notons $A =$"chacun des 5 groupes est formé de 11 joueurs appartenant à la même équipe"

$B =$"chacun des 5 groupes forme une équipe complète"

$N_{cp} =$le nombre de cas possibles , $N_{fav}(A) =$le nombre de cas favorables pour A et $N_{fav}(B) =$le nombre de cas favorables pour B

a) On a $P(A) = \dfrac{N_{fav}(A)}{N_{cp}}$. Un cas possible est le partage des 55 joueurs en 5 groupes G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 de 11 personnes chacun. En effectuant des changements au sein de chacun des groupes

G_i; $i = 1, ...5$, le groupe reste le même (tenues de même couleur par exemple) et par suite le cas possible reste le même aussi. Donc il y a répétition. Mais en effectuant des changements entre groupes distincts G_i et G_j; $i = 1, ...5$, $j = 1, ...5$ et $i \neq j$, les groupes changent (tenues de couleurs différentes par exemple) et par suite on obtient un autre cas possible. Donc il y a l'ordre. D'où un cas possible est une permutation avec répétition des 55 joueurs formant les 5 équipes et dont chacune est formée de 11 joueurs identique (tenues de même couleur). Donc $N_{cp} = P_{55;11,11,11,11,11} = \dfrac{55!}{11!11!11!11!11!} = \dfrac{55!}{(11!)^5}$.

Un cas favorable pour A est de mettre les 11 joueurs de chacune des 5 équipes dans le même groupe. On obtiendrait tous les autres cas favorables pour A, en permutant les 5 équipes sur les 5 groupes.

D'où $N_{fav}(A) = 5!$. Par suite $P(A) = \dfrac{N_{fav}(A)}{N_{cp}} = \dfrac{5!}{\dfrac{55!}{(11!)^5}} = \dfrac{5!\,(11!)^5}{55!}$.

b) Un cas favorable pour B est de mettre les 11 joueurs de chacune des 5 équipes dans le même groupe. On obtiendrait tous les autres cas favorables pour B, en permutant les 5 joueurs de chacune des 11 fonctions (gardients, avants centre,...) entre eux. On aura 5! possibilités pour chacune des 11 fonctions.

Soit au total $N_{fav}(B) = (5!)^{11}$. Par suite $P(B) = \dfrac{N_{fav}(B)}{N_{cp}} = \dfrac{(5!)^{11}}{\dfrac{55!}{(11!)^5}} = \dfrac{(5!)^{11}\,(11!)^5}{55!}$.

Exercice 5.

Notons $A =$"le cheval A gagne la course" , $B =$"le cheval B gagne la course" , $C =$"le cheval C gagne la course" , $D =$"le cheval D gagne la course".

On a $P(A) = P(B)$, $P(C) = 2P(A)$ et $P(D) = \dfrac{1}{2}P(A)$. Avec

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1 = P(A) + P(A) + 2P(A) + \dfrac{1}{2}P(A) = \dfrac{9}{2}P(A)$.

D'où $P(A) = \dfrac{2}{9} = P(B), \quad P(C) = \dfrac{4}{9} \quad \text{et} \quad P(D) = \dfrac{1}{9}$.

a) Notons $E_i =$"l'écurie E remporte la course n°i"$= A \cup B$.

On a $P(E_i) = \dfrac{4}{9}$ et $P(\overline{E_i}) = \dfrac{5}{9}$ pour tout $i = 1, 2, 3$. Les événements E_i , $i = 1, 2, 3$ sont indépendants du faite que les chevaux se trouvent au départ des 3 courses dans les mêmes conditions.

Soit $\overline{E} =$"l'écurie E ne remporte aucune victoire"$= \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}$.

On a $P(\overline{E}) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \overbrace{=}^{indépce} P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) = \left(\dfrac{5}{9}\right)^3$.

b) Soit $V_2(E) =$"l'écurie E remporte exactement deux victoires".

On a $V_2(E) = \left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) \cup \left(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right) \cup \left(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3\right)$, et

$P(V_2(E)) = P\left(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}\right) + P\left(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3\right) + P\left(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3\right) =$

$P(E_1)\,P(E_2)\,P\left(\overline{E_3}\right) + P(E_1)\,P\left(\overline{E_2}\right)P(E_3) + P\left(\overline{E_1}\right)P(E_2)\,P(E_3) = 3\left(\dfrac{4}{9}\right)^2\left(\dfrac{5}{9}\right)$.

Exercice 6.

Notons $G =$"l'enfant est un garçon" , $F =$"l'enfant est une fille" et $E =$"l'enfant est effrayé".

On a $P(G) = P(F) = 0.5$ et $P(E/G) = 0.25$ et $P(E/F) = 0.44$

a) $P(E) = P(E \cap (G \cup F)) = P(E \cap G) + P(E \cap F) = P(E/G)P(G) + P(E/F)P(F) = 0.25 * 0.5 + 0.44 * 0.5 = 0.345$

b) $P(F/E) = \dfrac{P(F \cap E)}{P\,(E)} = \dfrac{P(E/F)P(F)}{P\,(E)} = \dfrac{0.44 * 0.5}{0.345} = \dfrac{0.44 * 0.5}{0.345} \simeq 0.6377.$

Exercice 7.

Notons $F =$"l'animal est une femelle" , $M =$"l'animal est atteint de la maladie".

i) $1^{ière}$ méthode : on a $P(M/F) = \dfrac{N_{FM}}{N_F} = \dfrac{33}{200} = 0.165$

i) $2^{ière}$ méthode : on a $P(F) = \dfrac{200}{400} = 0.5,\ P(M) = \dfrac{50}{400} = 0.125\, et\, P(F/M) = \dfrac{33}{50} = 0.66.$

D'où $P(M/F) = \dfrac{P(M \cap F)}{P\,(F)} = \dfrac{P(F/M)P(M)}{P\,(F)} = \dfrac{0.66 * 0.125}{0.5} = 0.165.$

Exercice 8.

Notons $H =$"la personne est un homme" , $F =$"la personne est une femme" et $D =$"la personne est daltonienne" .

On a $P(H) = 0.45,\quad P(F) = 0.55,\quad P(D/H) = 0.04 \quad et \quad P(D/F) = 0.005$

1) On a $P(D) = P\left((D \cap H) \cup (D \cap F)\right) = P(D \cap H) + P(D \cap F) =$

$P(D/H)P(H) + P(D/F)P(F) = 0.04 * 0.45 + 0.005 * 0.55 = 0.02075.$

2) La personne choisie est daltonienne

i) On a $P(H/D) = \dfrac{P(H \cap D)}{P\,(D)} = \dfrac{P(D/H)P(H)}{P\,(D)} = \dfrac{0.04 * 0.45}{0.02075} \simeq 0.8675.$

ii) On a $P(F/D) = \dfrac{P(F \cap D)}{P\,(D)} = \dfrac{P(D/F)P(F)}{P\,(D)} = \dfrac{0.005 * 0.55}{0.02075} \simeq 0.1325$

Exercice 9.

Notons $T_i =$"le témoin n°i affirme que X porte une paire de lunettes" , $i = 1, 2$ et $L =$"l'individu porte une paire de lunettes" .

On a $P(L) = 0.30$, $P(\overline{L}) = 0.70$ et l'erreur du témoin n°i se traduit par : $P(T_i/\overline{L}) = 0.1 \quad et \quad P(\overline{T_i}/L) = 0.1$

a) On a $P(L/T_1) = \dfrac{P(T_1/L)P(L)}{P\,(T_1)} = \dfrac{P(T_1/L)P(L)}{P(T_1/L)P(L) + P(T_1/\overline{L})P(\overline{L})} =$

$\dfrac{0.9 * 0.3}{0.9 * 0.3 + 0.1 * 0.7} \simeq 0.794.$

b) On a $P(L/T_1 \cap T_2) = \dfrac{P(T_1 \cap T_2/L)P(L)}{P\,(T_1 \cap T_2)} = \dfrac{P(T_1 \cap T_2/L)P(L)}{P(T_1 \cap T_2/L)P(L) + P(T_1 \cap T_2/\overline{L})P(\overline{L})}$

$\overbrace{=}^{indépce} \dfrac{P(T_1/L)P(T_2/L)P(L)}{P(T_1/L)P(T_2/L)P(L) + P(T_1/\overline{L})P(T_2/\overline{L})P(\overline{L})} =$

$\dfrac{0.9 * 0.9 * 0.3}{0.9 * 0.9 * 0.3 + 0.1 * 0.1 * 0.7} \simeq 0.972.$

Exercice 10.

Notons T ="le test est positif sur la personne" et M ="la personne est atteinte de la maladie M" .

On a $P(M) = p \quad , \quad P(\overline{M}) = 1 - p$ et $P(T/M) = 0.95 = P(\overline{T}/\overline{M})$

Il s'agit de calculer $P(M/T) = \dfrac{P(T/M)P(M)}{P(T)} = \dfrac{P(T/M)P(M)}{P(T/M)P(M) + P(T/\overline{M})P(\overline{M})} =$

$\dfrac{0.95p}{0.95p + 0.05(1-p)}$

Applications Numériques :

Si $p = 0,05 \quad \Rightarrow \quad P(M/T) = \dfrac{0.95 * 0.05}{0.95 * 0.05 + 0.05 * 0.95} = 0.5$

Si $p = 0,005 \quad \Rightarrow \quad P(M/T) = \dfrac{0.95 * 0.005}{0.95 * 0.005 + 0.05 * 0.995} \simeq 0.0872.$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage