Série N° 2 : Dérivées et Developpement limités

SV1-STU1

Solution1

★ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$.

f est définie comme un quotient, sa dérivée se calcule donc comme suit :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

avec $u(x) = 3x-4$ et $v(x) = x-2$.

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = \frac{3(x-2)-(3x-4)1}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}}$$

★ Soit la fonction g définie sur $[0;4[\cup]4;+\infty[$ par $g(x) = \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$.

Considérons la fonction $\phi(x) = \sqrt{x}$. Alors $g(x) = f(\phi(x)) = (f\circ\phi)(x)$.

Ainsi, en appliquant la formule (I) ci-dessus, il vient :

$$g' = \phi'.(f'\circ\phi) \text{ c'est-à-dire } g'(x) = \phi'(x)\, f'(\phi(x))$$

On calcule alors $\phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui conduit à :

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{-2}{(\phi(x)-2)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)^2}}$$

★ Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{3\cos x - 4}{\cos x - 2}$.

Par un raisonnement analogue au précédent, on constate que $g(x) = f(\psi(x)) = (f\circ\psi)(x)$ avec $\psi(x) = \cos x$.

En utilisant la formule (I) ci-dessus, on en déduit que $h'(x) = \psi'(x).f'(\psi(x))$. Ainsi :

$$\boxed{h'(x) = -\sin x\frac{-2}{(\cos x-2)^2} = \frac{2\sin x}{(\cos x-2)^2}}$$

Solution 2

Pour les deux questions on applique le théorème de Rolls, sur l'intervalle [a,b], à la fonction :

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Solution 3

$$\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = \frac{(1-e^x)}{x}\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{1+x} \underset{0}{\approx} \frac{-1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

$$\frac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2 2x} = \frac{\ln(1+(\cos(3x)-1)}{\sin^2 2x} \underset{0}{\approx} \frac{\cos(3x)-1}{\sin^2 2x} \underset{0}{\approx} -\frac{9x^2}{2}\frac{1}{4x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-9}{8}$$

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right) \underset{+\infty}{\approx} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Solution 4

$$(fg)(x) = 6 + x - x^2 + o(x^2)$$

Solution 5

$$2\cos x + \sin x = 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$$

$$= 2 + x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\ln(2\cos x + \sin x) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))$$

$$= \ln 2 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + \frac{5x^3}{24} - \frac{35x^4}{192} + o(x^4)$$

$$\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\cos(\ln(\cos x)) = 1 - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage