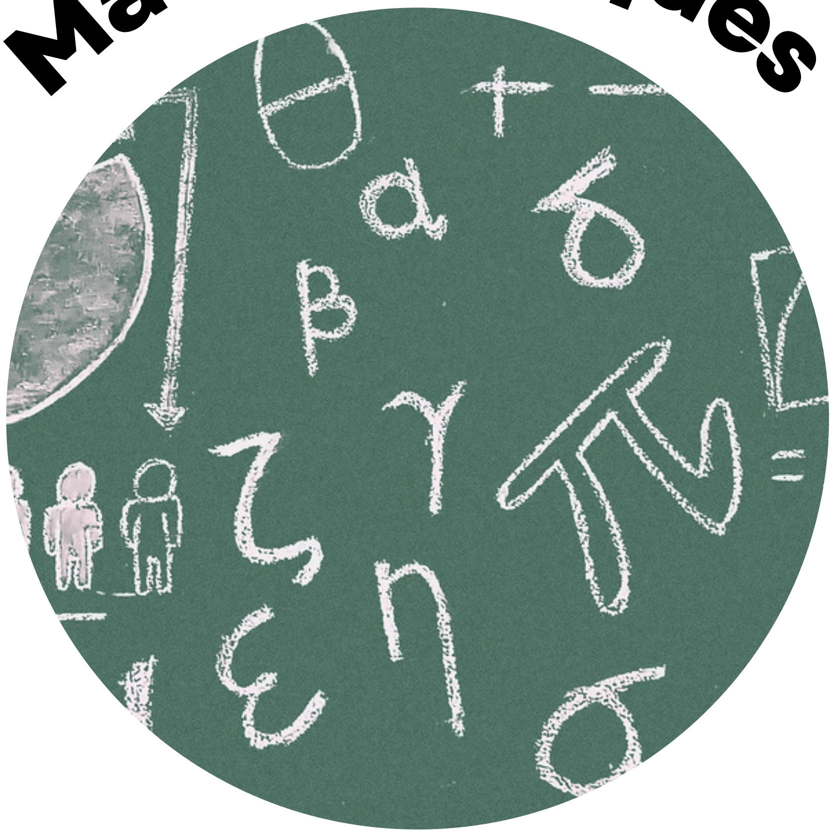
BIOLOGIE MAROC
www.biologie-maroc.com

Mathématiques



SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

Suites

Exercice 1 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par]0,1] et par la relation de récurrence

$$\qquad \frac{(u_n)}{}$$

1. Montrer que : 0.
2. Montrer que : $\mathbb{N}$, 1.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par]1,2] et par la relation de récurrence

$$\frac{(u_n)}{} \qquad$$

1. Montrer que : 1.
2. Montrer que : $\mathbb{N}$, 2.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soient et b trois réels. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par et la relation de récurrence :

1. Comment appelle-t-on la suite (u_n) lorsque ? Lorsque que et ?
2. Exprimer dans les deux cas particulier de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer et en fonction de et b.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :

$$\sum$$

5. On suppose que 1. Démontrer que

$$\sum \qquad \frac{}{}$$

6. Déduire de ce qui précède que pour tout .

$$\frac{(u \qquad)}{}$$

7. On suppose dans cette question que et que . Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que 1, montrer que (u_n) converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

Et la donnée de

1.
   1.1. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, et que la suite est monotone.
   1.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
2.
   2.1. Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, et que la suite est monotone.
   2.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
3.
   3.1. On pose 2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{}$.
   3.2. En déduire une expression de en fonction de n et . Retrouver le résultat des deux premières questions.
   3.3. En déduire

$$\sum \frac{}{}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{n}}$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général défini par

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{n}}$$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

1. On pose que $\frac{E(\sqrt{n})}{}$; pour tout , montrer que

2. On pose que $\frac{\left(E(\sqrt{n})\right)}{}$; pour tout , montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie par et par la relation de récurrence

$$\frac{}{} \quad \frac{}{}$$

1. Montrer que pour tout , 0.
2. Calculer la limite éventuelle de la suite (u_n) .
3. Montrer que pour tout $\mathbb{N}$, 3.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme et par la relation de récurrence :

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Montrer que la suite (u_n) de terme général définie par :

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Montrer que la suite (u_n) de terme général définie par :

$$\frac{(2 \quad 1)}{(3 \quad 3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Montrer que pour tout

$$\frac{\quad}{k(k+1)} - \frac{\quad}{\quad}$$

2. Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout par

$$\sum \frac{\quad}{k(k \quad 1)} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{n(n+1)}$$

A l'aide de la question 1. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite à valeurs réelles définie par la donnée de , et la relation de récurrence

Soient (v_n) et (w_n) les suite à valeurs réelles définies, pour tout $\mathbb{N}$, par

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-$. En déduire une expression de en fonction de n, de et de u_1.
2. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de en fonction de n, de et de u_1.
3. Calculer de deux façons différentes et en déduire en fonction de n, de et de u_1.
4. Selon les valeurs de et de déterminer si la suite (u_n) converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme — et par la relation de récurrence :

$$-+\sqrt{u\quad -}$$

Montrer que la suite (u_n) est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

2. Etudier la suite (u_n) de nombres réels définie par la donnée de :

$$(u\quad)$$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression

$$\sqrt{n\quad}\quad\sqrt{n\quad}$$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) de nombres réels définies pour tout par

$$-\quad-\quad-\quad-$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$\sqrt{2\quad}$$

1. Montrer que, pour tout $\mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout par :

$$\frac{\quad}{\sqrt{n}}E(\sqrt{n})$$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

1. Montrer que la relation de récurrence $-(1-\sqrt{\quad})$ et la donnée initiale $-$ permet de définir une suite (u_n) de nombres réels appartement à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que la suite est décroissante.

3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Pour tout entier 0, on considère la fonction $[0,1]$ définie par $f_n(x)$ $(1 \quad x)$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   a) La fonction est-elle strictement monotone ?
   b) Montrer qu'il existe un unique $]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n)$ 0.
   c) Quel est le signe de (α_n) ?
2. On considère la suite de terme général (α_n) .
   a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite (α_n) est croissante.
   b) En déduire que la suite est convergente, on notera α sa limite.
   c) supposons que 1.
      i) Montrer qu'alors

$$\mathrm{m} \ (\alpha_n) \ =$$

      ii) A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n)$ 0, en déduire que 0, conclure.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par

$$\left(\sqrt{1 \quad -} \quad 1\right)$$

Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est $-$.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite l vérifie

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par

$$\frac{}{|\sin(1)|\sqrt{1}} \qquad \frac{}{|\sin(2)|\sqrt{2}} \qquad \frac{}{|\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par la donnée de son premier terme et par la relation de récurrence

Montrer qu'elle est croissante, convergente et déterminer sa limite.
Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :
On considère la suite (u_n) de nombres réels définie par

$$\left(\frac{(-1)}{\quad} \quad \frac{\mathrm{n}(n^2)}{\quad}\right)$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n , tel que pour tout , on ait :

$$\left|\frac{(-1)^n}{\quad} \quad \frac{\sin(n^2)}{\quad}\right| \quad -$$

2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :
Montrer que la suite (u_n) définie par la donnée de et par la relation de récurrence

Est convergente et déterminer sa limite.
Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :
Montrer que la suite (u_n) définie par la donnée de et par la relation de récurrence

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est divergente.
3. Montrer que

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :
Pour chacune des assertions ci-dessus :

- Si vous estimez qu'elle est vraie, donner en justification.
- Si vous estimez qu'elle est fausse, justifiez-le en exhibant un contre-exemple.

1. Si une partie B de $\mathbb{R}$ est non vide et minorée, sa borne inférieure est un élément de
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la limite de u_n en $+\infty$ est ∞, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
3. Si (u_n) est une suite de Cauchy de nombres réels, alors est bornée.
4. Si (u_n) est une suite de nombres réels ne vérifiant pas

$$|u_n|$$

Alors elle est bornée.

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :
On considère la suite (u_n) la suite de nombres réels dont le terme général est défini pour par :

$$- \quad - \quad -$$

Montrer que

On pourra montrer que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Pour tout , on pose :

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{n}$$

1. Montrer que (u_n) est une suite divergente.
2. Pour tout , on pose :

$$\sqrt{n}$$

a) Montrer que,

Pour tout :

$$\overline{\sqrt{n}} \quad 2(\sqrt{n} \quad \sqrt{}) \quad \sqrt{n}$$

b) En déduire que, pour tout :

$$2\sqrt{n+} \quad \sqrt{}$$

c) Montrer que (v_n) est convergente et précisez sa limite.

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

1. Soit (H_p) la proposition suivante.

$$\overline{(n \quad 1)} \quad \overline{(n \quad p)} \quad - \quad \overline{}$$

Montrer (H_p) par récurrence sur p.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\sum - \quad - \quad - \quad -$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite.

On pourra montrer que cette suite une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 31 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $]0,1]$ donc 0. Montrons que entraine que 0.

$$- \quad \frac{(u_n)}{}$$

Donc pour tout $\mathbb{N}$, 0.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, [0,1] donc 1. Montrons que entraine que $u_{n+1} \leq 1$.

$$\_\_ \quad \frac{(u_n)}{} \quad \_ \quad \frac{(1)}{} \quad \_$$

Donc pour tout ℕ, 1.

3. Calculons

$$\_\_ \quad \frac{(u_n)}{} \quad \_\_ \quad \frac{(u_n)}{} \quad \_\_(- \quad)$$

Comme 1, on a 0, par conséquent

$$\_\_(- \quad u \ ) <$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de par u_n :

$$\frac{}{\_\_\_\_} \quad \frac{\_\_ \quad (u_n)}{\_\_\_\_\_\_} \quad \_ \quad \_\_ \quad \_ \quad \_$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante.

4. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notée l, cette limite appartient à [0,1] et cette valeur vérifie

$$\_ \quad \_\_ \quad \_ \quad \_\_ \quad l(- \quad l) \quad \{$$

Par conséquent 0.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence,]1,2] donc 1. Montrons que entraine que 1.

$$\frac{(u \ )}{} \quad \_ \quad \_ \quad \_$$

Donc pour tout ℕ, 1.

2. Faisons un raisonnement par récurrence,]1 2] donc 2. Montrons que entraine que 2.

$$\frac{(u_n)}{} \quad \_ \quad \frac{(2)}{} \quad \_ \quad \_$$

Donc pour tout ℕ, 2.

3. Calculons

$$\frac{(u_n)}{} \quad \_ \quad -(u \qquad 3) = -(u \quad 1)(u \quad 3)$$

Comme 2, on a et 0, par conséquent

$$-(u \quad 1)(u_n - 3) <$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par :

$$\frac{}{\_\_\_\_} \quad \frac{(u_n)}{\_\_\_\_\_\_} \quad \frac{\_}{\_\_} \quad \_\_\_$$

Il faut alors étudier la fonction f:]1,2] définie par

$$f(x) \quad - \quad —$$

$$(x) \quad - \quad —— \quad ———$$

	$\sqrt{\ }$ $\quad$ 2
(x)	
$f(x)$	↘ $\sqrt{3}$ ↗ $-$

Cela montre que

$$]1,2], f(u_n)$$

Et que donc

$$——$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

4. On note l cette limite, elle appartient à $[1,2]$ et cette valeur vérifie

$$— \quad - \quad — \quad - \quad \Bigg\{$$

Par conséquent $l =$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Lorsque alors b, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b.
   Lorsque et alors , la suite (u_n) est une suite géométrique de raison a,
2. Lorsque alors
   Lorsque et alors (remarque, si cela ne change rien).
3.

$$a(a \quad b) \qquad (a \quad 1)b$$
$$(a \qquad (a \quad 1)b \qquad + (a^2 + a + 1)b$$

4. Pour l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de), on peut aussi remarqué que la relation est aussi vérifiée pour et d'après 3.
   Montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang

$$\left(a \quad \sum \quad\right) \qquad (a \quad b(a \qquad 1))$$
$$b(a \qquad a)$$
$$b(a \qquad 1) \qquad \sum$$

   Donc pour tout , on a

$$\sum$$

5.

$$\sum a \qquad —— \quad ——$$

Autre méthode, on pose k, si alors et si alors

$$\sum \qquad \sum \qquad \overline{\quad} \qquad \overline{\quad}$$

6. D'après 4. Pour tout

$$\sum \qquad \overline{\quad} \qquad \frac{(a \quad 1) \quad b(a \quad 1)}{}$$

$$\frac{(u \qquad b)}{} \qquad \frac{(u \qquad)}{}$$

7. Comme $a > 1$, lorsque et u équivaut à > 0, on reprend l'expression du 7. Il est clair que
8. Comme 1, donc $(u \quad)$ lorsque n par conséquent

$$\overline{\quad}$$

Et effectivement cette limite ne dépend pas de .

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1.
   1.1. Par récurrence et montrons que entraine

$$- \qquad -$$

Donc pour tout 0,

$$- \qquad - \qquad \overline{\quad}$$

Donc la suite $(u \ )$ est croissante.

1.2. La suite est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$- \qquad -$$

2.
   2.1 Par récurrence et montrons que entraine

$$- \qquad -$$

Donc pour tout 0,

$$- \qquad - \qquad \overline{\quad}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

2.2 La suite est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$- \qquad -$$

3.
   3.1

$$- \qquad - \qquad -(u \quad 2) \quad -$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\ }$.

3.2
On déduit de 3.1. que pour tout :

$$\text{—} \qquad \text{—}(u \quad 2)$$

Alors pour tout :

$$(- \quad -)$$

3.3

$$\sum \quad \sum (v \quad 2) = (v \quad 2) + (v \quad 2) \quad (v \quad 2) \quad 2(n \quad 1)$$

$$2(n \quad 1)$$

$$\left(1 \quad - \quad -\right) \quad 2(n \quad 1) \quad \frac{-}{-} \quad 2(n \quad 1)$$

$$\left(1 \quad -\right) \quad 2(n \quad 1) \quad - \quad 2(n \quad 1)$$

Ce qui entraine que

$$\frac{\sum}{} \quad \frac{- \quad 2(n \quad 1)}{} \quad \frac{-}{} \quad \frac{2(n \quad 1)}{}$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers ∞, il s'agit donc d'une forme indéterminée.
   Première méthode
   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{n}} \quad \frac{\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n-\sqrt{4}\right)\left(\quad \sqrt{\quad}\right)}{\left(n+\sqrt{\quad}\right)\left(\quad \sqrt{\quad}\right)\left(\quad \sqrt{\quad}\right)}$$

$$\frac{\left(4 \quad (4 \quad 1)\right)\left(n \quad \sqrt{\quad}\right)}{\left(\quad -(n^2+1)\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)} \quad \frac{\left(n-\sqrt{\quad}\right)}{-\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\quad}}$$

   Il s'agit d'une forme encore plus indéterminée que la précédente, il s'agit donc d'une mauvaise idée.
   Deuxième méthode

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{n}} \quad \frac{\sqrt{\left(\quad -\right)}}{\sqrt{\left(\quad -\right)}} \quad \frac{\sqrt{\quad -}}{\sqrt{1 \quad -}} \quad \frac{\left(1+\sqrt{\quad -}\right)}{\left(1+\sqrt{\quad -}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1 \quad -}}{\sqrt{1 \quad -}}$$

$$\frac{\sqrt{1 \quad -}}{\sqrt{1 \quad -}}$$

2. Le numérateur est une forme indéterminée et le dénominateur est une forme indéterminée ∞, donc est une forme indéterminée.
   Première méthode
   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{n}} \qquad \frac{(2n-\sqrt{\quad}\ 1)(2\quad\sqrt{\quad})(\quad\sqrt{\quad})}{(n-\sqrt{\quad})(\quad\sqrt{\quad})(\quad\sqrt{\quad})}$$

$$\frac{(4\quad(4\quad 1))(n\quad\sqrt{\quad})}{(n\quad(n\quad 1))(2\quad\sqrt{\quad})} \qquad \frac{(n+\sqrt{\quad})}{(2n+\sqrt{\quad})} \qquad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4}} \qquad -$$

Donc la limite de v est $-$

Deuxième méthode

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{n}} \qquad \frac{\sqrt{\quad(\quad -)}}{\sqrt{\quad(\quad -)}} \qquad \frac{\sqrt{\quad -}}{\sqrt{1\quad -}} \qquad \frac{\left(1-\sqrt{\quad -}\right)}{\left(1-\sqrt{\quad -}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{1\quad -}}{\sqrt{1\quad -}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 donc il s'agit d'une forme indéterminée, c'est une mauvaise idée.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Pour tout il existe un unique $E(\sqrt{n})$ tel que

$$\sqrt{n}$$

Donc

$$(p\quad 1)$$

D'où l'on déduit que

$$\frac{\quad}{(p\quad 1)} \quad - \quad -$$

On multiplie ces dernières inégalités par $E(\sqrt{n})$ 0, car

$$\frac{\quad}{(p\quad 1)} \quad - \quad - \quad \frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n})\quad 1)} \quad \frac{E(\sqrt{n})}{\quad} \quad \frac{\quad}{E(\sqrt{n})}$$

Lorsque ∞, $E(\sqrt{n})$ donc

$$\underline{E(\sqrt{n})}$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 0.

2. Avec les mêmes notations on multiplie les inégalités

$$\frac{\quad}{(p\quad 1)} \quad - \quad -$$

Par $E(\sqrt{n})$

$$\frac{\quad}{(p\quad 1)} \quad - \quad - \quad \frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n})\quad 1)} \quad \frac{E(\sqrt{n})}{\quad}$$

Lorsque ∞, $E(\sqrt{n})$ donc

$$\underline{E(\sqrt{n})}$$

Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 1.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $- \quad - \quad -$

On va montrer que pour tout $1,$ entraine que $0.$

$$- \quad - \quad -$$

C'est bien le cas. Donc pour tout ,

2. Si la suite (u_n) admet une limite l alors

$$- \quad - \quad (l \quad 3)$$

3. Encore une fois, faisons un raisonnement par récurrence, 3, montrons que entraine que $u_{n+1} < 3$.

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Donc pour tout $\mathbb{N}$, 3.

4. Calculons

$$- \quad - \quad -(u_n^2 - 6u_n + 9) = -(u_n - 3)$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 3, elle convergente vers la seule valeur qui vérifie $l = -l^2 + -$, c'est-à-dire $l = 3$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

On va d'abord voir si la suite est monotone :

$$-$$

L'équation $-$ a pour discriminant $-$ 0, il s'agit donc, à un coefficient près d'une identité remarquable

$$- \quad 2\left(X \quad - \quad -\right) \quad 2\left(X \quad -\right)$$

Donc

$$- = 2\left(u_n - -\right)$$

La suite est croissante, montrons par récurrence, qu'elle est majorée par $-$

$$-$$

Montrons que $-$ entraine que $-$

$$- \quad \times\left(-\right) \quad + - \quad - \quad - \quad -$$

La suite est croissante et majorée, elle converge vers une limite l qui vérifie

$$- \quad - \quad 2\left(l - -\right) \quad -$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

Il suffit d'imaginer la tête de pour être décourager à l'avance de calculer pour essayer de montrer la monotonie de cette suite. On va faire autrement, pour tout $\{1 \quad n\}$

$$\_\_\_\_ \quad \_\_\_\_ \quad \_\_\_\_$$

Donc

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à ——. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à ——, on en déduit que

On en déduit que

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

Ce genre d'exercice ce traite toujours de la même façon, il faut « sentir » que l'on peut exprimer en fonction de u_n :

$$\frac{(2 \quad 1) \times (2 \quad 3)}{\times (3n \quad 3)(3 \quad 6)} \quad \frac{(2 \quad 1)}{(3 \quad 3)}$$

S'il y a une limite l elle vérifie

$$- \quad \left(1 \quad -\right)$$

Il reste à montrer que la suite de terme général converge.

Il est plus que clair que 0, la suite est minorée, de plus il suffit de regarder le quotient —— pour savoir si la suite est monotone (décroissante nous arrangerait bien)

$$\frac{2(n \quad 2)}{3(n+2)} \quad -$$

Donc la suite de terme général est décroissante et minorée donc elle converge, comme on l'a vu plus haut la seule limite possible est 0.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

$$- \quad \frac{}{k(k \quad 1)} \quad \frac{}{k(k \quad 1)}$$

2. Première méthode

$$\sum \frac{}{k(k \quad 1)} \quad \sum \left(- \quad \right) = \sum - \quad \sum$$

Dans la seconde somme on pose k 1, alors et

$$\sum - \quad \sum -$$

Ensuite on change en

$$\sum - \quad \sum - \quad \text{——}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent (u_n) converge et sa limite est 1.

Deuxième méthode

$$\text{——} \quad \text{——} \quad \frac{}{n(n \quad 1)} \left(- \quad -\right) + \left(- \quad -\right) \quad \left(\text{——} \quad -\right) + \left(- \quad \text{——}\right)$$

$$\text{——}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent (u_n) converge et sa limite est 1.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1.

$$- \quad -\left(- \quad \right) = \left(3 \quad —\right) u \quad - \quad - \quad -$$

$$= -\left(3u_n - - u_{n+1}\right) = -$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $-$

Donc

$$\left(-\right) \quad \left(-\right) \left(3 \quad - \right)$$

2.

$$- \quad - \quad - \quad -\left(- \quad \right) = \left(— \quad -\right) \quad -$$

$$- \quad = 2\left(-u \quad - \quad \right)$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison

Donc

$$\left(- - \quad - \right)$$

3. D'une part

$$- \quad - \quad - \quad -$$

D'autre part

$$\left(-\right) \left(3 \quad - \right) \quad \left(- - \quad - \right)$$

Donc

$$-\left(\left(-\right) \left(3 \quad - \right) \quad \left(- - \quad - \right)\right) = \left(-\right) \left(- \quad - \right) \quad \left(- - \quad - \right)$$

4. Comme tend vers l'infini si $- \quad -$ alors tend vers l'infini donc ne converge pas.

Supposons que $- \quad -$ 0, comme $\left(-\right)$ tend vers 0, alors pour toutes valeurs de $- \quad -$

u tend vers 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Si la suite de terme général converge vers une limite l alors

$$- \sqrt{l \quad -}$$

Il est clair qu'il va falloir élever au carré quelque chose, mais si on élève au carré ces deux expressions on va avoir un double produit où il y aura encore une racine alors il faut modifier légèrement cette égalité

$$- \sqrt{l \quad -}$$

On y va

$$\left(l - -\right) = \quad -$$

Mais attention, il faudra faire une réciproque des fois que $\quad -$ soit négatif.

$$\text{—} \qquad -$$

Cette équation du second degré a pour discriminant

Et donc comme racines

$$\text{———} \qquad \qquad \text{———}$$

La solution ne convient pas car

$$- \sqrt{2 \quad -}$$

La solution est la seule possible.

Comme 4, ce qui nous arrangerait maintenant c'est que la suite de terme général u_n soit croissante et majorée par 4, on pourrait alors conclure que la suite de terme général est convergente et de limite 4. Montrons ce résultat par récurrence.

Pour u — c'est clair — < 4.

Montrons que entraine que

$$- \sqrt{u \quad -} \quad - \quad \sqrt{4 \quad -} \quad - \quad \sqrt{-} \quad - \quad -$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on aura besoin de montrer, au préalable que pour tout $> -$, pour ce genre de récurrence on peut dire que c'est trivial, on vérifie au passage que la suite de terme général u_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $u \quad - \qquad -$

Regardons maintenant si la suite est monotone :

$$- \sqrt{u \quad -} \qquad - \qquad \sqrt{u \quad -} \quad \frac{\left(- - u_n + \sqrt{\quad -}\right)\left(\frac{5}{-} - u_n - \sqrt{\quad -}\right)}{- \qquad \sqrt{u \quad -}}$$

$$\frac{\left(- \qquad\right) \quad \left(u \quad -\right)}{- \qquad \sqrt{u \quad -}} \quad \frac{}{- \qquad \sqrt{u \quad -}} \quad \frac{(u \quad 2)(u \quad 4)}{- \qquad \sqrt{u \quad -}}$$

$$-$$

$$- \quad - \quad - \quad \sqrt{u \quad -}$$

Par conséquent u > 0, la suite est croissante

C'est fait, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible

4.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Il s'agit d'une forme indéterminée, on mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur les termes qui tendent le plus vite vers l'infini

$$\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{n}} \quad \frac{\left(\sqrt{\ } \quad -\right)}{\left(\sqrt{n} \quad -\right)} \quad \frac{\sqrt{n} \quad -}{\sqrt{n} \quad -}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \frac{\sqrt{n} \quad -}{\sqrt{n} \quad -} \quad -$$

2. Si (u_n) admet une limite l, celle-ci vérifie

Regardons si la suite est monotone, pour tout

$$-(u \quad)$$

Donc la suite est décroissante.

Montrons par récurrence que pour tout $0.$ 1, puis montrons que pour tout entraine que $1.$

$$(u_{n-1})^2 = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$$

entraine que $0 < 1 - u_{n-1} < 1$ et le produit de deux nombres compris entre 0 et est compris entre 0 et 1, donc $0 < u_n < 1$. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

$$\sqrt{n \quad } \quad \sqrt{n \quad } \quad \frac{(n \quad 1)}{\sqrt{n \quad } \quad \sqrt{n \quad }} \quad \frac{}{\sqrt{\ \left(\quad - \quad -\right)} + \sqrt{n^2\left(1 \quad - \quad -\right)}}$$

$$\frac{}{n\sqrt{1 + - \quad -} \quad \sqrt{\quad - \quad -}} \quad \frac{}{\sqrt{1 \quad - \quad -} \quad \sqrt{1 \quad - \quad -}}$$

Donc cette expression admet une limite et

$$\left(\sqrt{n \quad } \quad \sqrt{\quad }\right) \quad \frac{}{\sqrt{1 \quad - \quad -} \quad \sqrt{1 \quad - \quad -}} \quad -$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

Nous allons utiliser le théorème sur les suites adjacentes

$$- \quad - \quad - \quad \frac{}{(n \quad 1)} \quad \left(1 \quad - \quad - \quad -\right) \quad \frac{}{(n \quad 1)}$$

Donc la suite (u_n) est croissante

$$\frac{}{(n \quad 1)} \quad - \quad \frac{}{(n \quad 1)} \quad \frac{}{(n \quad 1)} \quad - \quad \frac{(n \quad 1)-(n \quad 1)}{(n \quad 1)}$$

$$\frac{(n \qquad\qquad 1)}{(n+1)} \qquad \frac{}{(n \quad 1)}$$

Donc la suite (v_n) est décroissante

$$-$$

Donc les deux suites convergent vers une même limite.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. , montrons que $1 < u_n$ entraine que

$$= \sqrt{2u \qquad} \qquad \sqrt{2 \qquad\qquad}$$

Cela montre que la suite est bien définie car si $-$ alors n'est pas défini.

2.

$$= \sqrt{2u \qquad} \qquad \frac{}{\sqrt{2 \qquad\qquad}} \qquad \frac{}{\sqrt{2 \qquad\qquad}} \qquad \frac{(u \quad 1)}{\sqrt{2 \qquad\qquad}}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$\sqrt{2 \qquad\qquad}$$

$$\sqrt{2 \qquad\qquad} \qquad \text{donc}$$

$$\sqrt{2 \qquad\qquad} \qquad\qquad\qquad (l \quad 1)$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

On a

$$E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \quad E(\sqrt{n})$$

Donc

$$\sqrt{\ } \qquad (\sqrt{n}) \leq \sqrt{\ }$$

On divise par $\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{\ }} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ }} \qquad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. Montrons par récurrence que 0, 1, cela montrer au passage que la suite est bien définie pour tout n (en effet si $[0,1]$ n'est pas défini. $]0,1[$, montrons maintenant que $]0,1[$ entraine que $u_{n+1} \in \,]0,1[$

$$\sqrt{1-u_n} < 1 \Leftrightarrow 0 \qquad \sqrt{1 \qquad\qquad}$$

$$-(1-\sqrt{\qquad\qquad}) \quad -$$

Donc $]0,1[$.

2. Nous allons employer la méthode « normale »

$-(1-\sqrt{\quad})$ $-$ $-\sqrt{1}$

$$\frac{\left(- - u_n - -\sqrt{\quad}\right)\left(\frac{}{5} - u_n + \frac{}{5}\sqrt{\quad}\right)}{- \quad \frac{}{5}\sqrt{1}} \qquad \frac{\left(- \quad\right) \quad -(1 \quad)}{- \quad \frac{}{5}\sqrt{1}}$$

$$\frac{- \quad - \quad - \quad -}{- \quad -\sqrt{1}} \qquad \frac{-}{- \quad \frac{}{5}\sqrt{1-u_n}} \qquad \frac{\left(u \quad -\right)}{\frac{}{5} - u_n + \frac{}{5}\sqrt{1}}$$

Et là cela coince, au numérateur, on connait bien le signe de mais pas celui de — et au dénominateur, rien ne nous permet d'affirmer que – – (cela nous aurait arranger parce que dans ce cas on aurait pu conclure que le dénominateur est positif). Bref il doit y avoir un « truc ».

$$-(1-\sqrt{\quad}) \quad -\frac{(1-\sqrt{\quad})(\quad \sqrt{\quad})}{\sqrt{1}} \quad - \quad \frac{(1 \quad)}{\sqrt{1}}$$

$$- \quad \frac{}{\sqrt{1}} \quad - \quad \frac{}{}$$

Et voilà le travail, la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie

$$= -\left(1-\sqrt{1-l}\right) \Leftrightarrow 5l = 1-\sqrt{1-} \qquad \sqrt{\quad}$$

Maintenant on peut élever au carré mais on n'aura qu'une implication parce que rien ne garantit que $5l-1$ soit du même signe que $-\sqrt{1-l}$, c'est-à-dire négatif (en fait si parce que – et la suite est décroissante donc –, mettons que l'on ait rien vu).

$$(5l-1) \quad = \qquad \left(l \quad -\right)$$

Il y a deux limites possibles, convient car $\sqrt{\quad}$, par contre — ne convient pas car — – et $-\sqrt{1 \quad -}$ $\sqrt{-}$ –

Finalement la suite est décroissante, minorée par 0, elle converge vers la seule limite possible 0.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

1. a) f_n est définie, continue et dérivable à dérivée continue sur $[0,1]$.

$$(x) \qquad 2(1-x)(-1) = nx^{n-1} + 2(1-x)$$

Pour x $]0\ 1[$, et donc est strictement croissante. On pourrait vérifier que $f_n'(0)$ et que $f_n'(1)$ mais même si ces dérivées avaient été nulle cela n'aura pas changer la conclusion.

b) $f_n(0) = -1$ et $f_n(1)$ 1, d'après 1.a) est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]-\ 1[$, donc $]-1,1[$ admet un unique antécédent $]0,1[$, c'est-à-dire tel que $f_n(\alpha_n)$ 0.

c)

$$(\alpha_n) \qquad (1 \quad) \qquad (1 \quad)$$
$$(\alpha_n) \qquad (1 \quad) \qquad (\alpha \quad 1)$$

Car et < 0.

2. a) La fonction est une bijection croissante donc

$$(\alpha_{n+1}) \qquad (\alpha_n)$$

Par conséquent la suite (α_n) est croissante.

b) la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

c) i) La suite est croissante alors

Cela entraine que

Or, si alors la limite de est nulle, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que

ii) On a vu au 1. c) que

$f\ (\alpha_n)$ $(1\ \ )$

Ce qui entraine, d'après 2. c) i) que

$(1\ \ )$

Autrement dit que

Ce qui signifie que 1, (comme et que (α_n) admet une limite α entraine que 1), il y a une contradiction avec l'hypothèse 1, par conséquent $\alpha = 1$.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

$$\frac{\sqrt{1\ \ -}}{-}\quad\left(-\right)$$

Avec

$$f(x)\ \frac{\sqrt{1}}{}$$

Si f admet une limite lorsque x 0, avec alors cette limite est la même que celle de .

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Première méthode

Règle de L'Hospital, on pose

$$g(x) = \sqrt{1}\qquad h(x)$$

Alors

$$(x)\ \frac{}{2\sqrt{1}}\qquad (x)$$

$$\frac{(x)}{(x)}\ \frac{}{2\sqrt{1}}$$

$$\frac{(x)}{(x)}\ \frac{}{2\sqrt{1}}\ -$$

On en déduit que

$$\frac{\sqrt{1}}{}\qquad \frac{(x)}{(x)}\ -$$

Et alors

$$-$$

Deuxième méthode

On pose

$$g(x)=\sqrt{1\quad}$$

$$\frac{\sqrt{1\quad}}{\quad}\qquad\frac{g(x)\quad g(0)}{\quad}$$

Il s’agit du taux de variation, en 0, de la fonction g, sa limite est $g'(0)$. Comme $g'(x)\quad\frac{}{2\sqrt{1}}$:

$$\frac{\sqrt{1\quad}}{\quad}\qquad(0)\quad -$$

Et alors

$$-$$

Troisième méthode

$$\left(\sqrt{1\quad-\quad}\quad 1\right)\quad\frac{\left(\sqrt{1\quad-\quad}\quad 1\right)\left(\sqrt{1\quad-\quad}\quad 1\right)}{\sqrt{1\quad-}}\quad\frac{-}{\sqrt{1\quad-}}\quad\frac{-}{\sqrt{1\quad-}}\quad\frac{}{\sqrt{1\quad-}}$$

$$\frac{}{\sqrt{1\quad-}}\quad-$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}\qquad\frac{}{}\quad\frac{}{}$$

$$\left(\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}\qquad\frac{}{}\right)\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{(2\qquad 1)}{(2\qquad 1)(n\quad 1)}$$

$$\frac{}{(2\qquad 1)(n+1)}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

2. La suite (u_n) est minorée par 0 et décroissante donc elle converge vers une limite l.

$$\{1\qquad n\}$$

$$\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}$$

Donc

$$\underbrace{\frac{}{2n}}\qquad\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}\quad\frac{}{}\qquad\frac{}{}\quad\underbrace{\frac{}{n+}}\qquad\frac{}{}$$

Autrement dit

$$\frac{}{}\qquad\frac{}{}$$

Ce qui entraine que

$$-$$

Cela montre que $-\qquad 1$.

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

On va minorer par une suite qui tend vers

$$\{1 \quad n\}, \quad |\sin(k)|\sqrt{k} \quad \sqrt{k} \quad \sqrt{n}$$

Ce qui entraine que

$$\{1 \quad n\}, \frac{}{|\sin(k)|\sqrt{k}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

Donc

$$\underbrace{\overline{3+\sqrt{n}}} \quad \underbrace{\overline{\quad \sqrt{n}}} \quad \overline{\quad \sqrt{n}}$$

On en déduit que

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

$$—$$

Transformons le polynôme —

Son discriminant est

$$—$$

Donc, à un coefficient près, il s'agit d'une identité remarquable

$$— = 4\left(X^2 - -X + —\right) \quad 4\left(X \quad -\right)$$

Alors

$$— \quad 4\left(u \quad -\right)$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence qu'elle est majorée par –.

Pour $u_0 = 0$ c'est vrai. Montrons que – entraine que –.

$$— \quad — \quad \times\left(-\right) = — \quad — \quad — \quad — \quad -$$

Donc –, (u_n) est croissante et majorée par – donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$— \quad — \quad 4\left(l \quad -\right) \quad -$$

(u_n) converge vers la seule limite possible –.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

1.

$$\left|\frac{(-1)}{} + \frac{\mathrm{n}(n^2)}{}\right| \leq \left|\frac{(-1)}{}\right| + \left|\frac{\mathrm{n}(n^2)}{}\right| \quad - \quad \left|\frac{\mathrm{n}(n^2)}{}\right| \quad - \quad -$$

La suite de terme général – est décroissante et pour tout

$$- \quad - \quad -$$

Donc pour tout

$$\left|\frac{(-1)}{}\quad\frac{\mathrm{n}(n^2)}{}\right| \quad - \quad - \quad -$$

2. Pour tout

$$\left(-\right)$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

$$-$$

Montrons par récurrence que pour tout que
Pour $n = 1$ c'est vrai. Montrons que u entraine que

$$\overline{}$$

C'est une grosse évidence.
On en déduit que pour tout

$$\overline{} \qquad \overline{}$$

Comme

$$\overline{}$$

D'après le théorème des gendarmes

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

1.

Pour montrer que (u_n) est décroissante il va falloir montrer que

$$\ln(3)$$

Montrons cela par récurrence que $\ln(3)$

$\ln(e)$ $\ln(3)$ $\mathrm{n}(3)$ pour c'est vrai.

Montrons que u $\ln(3)$ entraine que $\ln(3)$

$$\ln(3) \quad {}^{\ln(3)} \quad \ln(3) \quad \ln(3)$$

Donc pour tout n $\mathbb{N}$, $\ln(3)$

Cela montre que et que la suite (u_n) est décroissante.

2. Si la suite (u_n) est convergente vers une limite l alors

$$\ln(3)$$

Or la suite (u_n) est décroissante et $\ln(3)$ donc elle ne peut pas converger vers $\ln(3)$.

3. La suite (u_n) est décroissante, si cette suite est minorée, elle converge or ce n'est pas le cas, donc elle n'est pas minorée. Une suite décroissante et non minorée tend vers ∞.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. C'est faux, par exemple $]0,1]$ est minorée, sa borne inférieure est 0 et $]0,1]$.
2. C'est faux, par exemple la suite (u_n) la suite de nombres réels définit par :

$$(-1)^n\sqrt{n}$$

En transformant , pour :

$$\left(1 \quad \frac{(-1)}{\sqrt{n}}\right)$$

Il est clair que

$$1+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}-\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)=1+(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$$

Donc pour $n=2p$, $u_{2p+1}<u_{2p}$, ce qui montre que la suite n'est pas croissante même à partir d'un certain rang. En fait la suite augmente entre u_{2p-1} et u_{2p} et elle diminue un peu moins entre u_{2p} et

.

3. Une suite de Cauchy à valeurs réelle converge vers une limite l donc

$$, |u \quad l|$$

Prenons (n'importe quelle valeur convient) alors $|u \quad l|$ ce qui équivaut à

Ou encore à

Ensuite l'ensemble $\{u \ ,$ $\}$ est un ensemble fini, il admet donc un minimum et un maximum, notons les respectivement et , ce qui signifie que

$$\{0,1,\dots,N\},$$

Par conséquent

$$\mathrm{n}(l \quad) \qquad \mathrm{x}(l \quad)$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : cela signifie nullement que l'ensemble $\{u \quad \mathbb{N}\}$ admet un maximum et un minimum, cela peut être le cas ou pas.

4. On fait comme si on n'avait rien vu.

Commençons par écrire ce que signifie :

$$|u_n|$$

$$\Rightarrow |u_n| >$$

Puis écrivons la négation de cette proposition, attention, il y a un piège, la négation de «$n>N, |u_n|>A$ » est « $n\le N$ ou $|u_n|\le A$ »

$$|u_n| \qquad (1)$$

Car la négation de $(P)\Rightarrow(Q)$ est : (P) et $\mathrm{non}(Q)$

Là, il ne faut pas s'enthousiasmer en se disant que $|u_n|$ veut bien dire que (u_n) est bornée.

Rappelons ce que signifie qu'une suite est bornée

$$|u_n| \qquad (2)$$

Ou strictement inférieure à A si on veut.

Dans (1) il y a un « $\exists n\in\mathbb{N}$ » et dans (2) il y a un « $\forall n\in\mathbb{N}$ », cela pose problème parce que l'on ne voit pas bien comment on pourrait faire pour transformer le « il existe » en « pour tout ». Il y a sans doute un truc que l'on a pas vu, et si la proposition 4 était fausse malgré les apparences trompeuses. Si par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une sous-suite tendant vers l'infini et que les autres termes restent bornés, on serait dans le cadre de la proposition 4 et pourtant la suite n'est pas bornée, donnons un exemple d'une telle suite : pour tout p

La limite de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n)$ cette suite n'est pas $+\infty$ car il existe une sous-suite constante (et égale à 0) et pourtant (u_n) n'est pas bornée car il existe une sous-suite tendant vers l'infini. Et voilà !

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

On rappelle qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\Rightarrow |u \quad |$$

Ou encore

$$|u \quad |$$

Nions cette proposition

$$|u \quad | \quad (1)$$

$$- \quad - \quad - \quad \overline{\quad} \quad \overline{\quad} \quad \left(- \quad - \quad -\right) \quad \overline{\quad} \quad \overline{\quad}$$

$$|u \quad | \quad \overline{\quad} \quad \overline{\quad} \quad \frac{}{\underbrace{n+}} \quad \overline{\quad} \quad \overline{\quad}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u \quad |$ ne tende pas vers 0, convient

Revenons à (1), prenons $-$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p \quad n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

Malheureusement cela ne suffit pas pour montrer que (u_n) tend vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy et elle ne tend pas vers ∞.

Il faut rajouter que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Pour tout n

$$- \quad - \quad - \quad \overline{\quad} \quad \overline{\quad}$$

Ce qui entraine que

La suite est croissante et elle n'est pas de Cauchy donc elle tend vers $+\infty$.

Remarque :

Si ce résultat ne vous parait pas évident, démontrons-le, nous savons que si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge, donc c'est une suite de Cauchy.

La contraposée de cette phrase mathématique est

Si (u_n) n'est pas de Cauchy alors elle n'est pas croissante ou elle n'est pas majorée.

Comme elle est croissante, elle n'est pas majorée.

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1. Nous allons montrer que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.

   Pour montrer que la suite (u_n) n'est pas une suite de Cauchy on va montrer

$$\text{et } |u_{n+p} - u_n| \quad (1)$$

$$|u \quad | \quad \left|1 \quad \frac{}{\sqrt{2}} \quad \frac{}{\sqrt{3}} \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{}} \quad \left(1 + \frac{}{\sqrt{}} \quad \frac{}{\sqrt{3}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}\right)\right|$$

$$\left|\frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}\right| \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\underbrace{\sqrt{n}}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{}{\sqrt{n}}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u \quad |$ ne tende pas vers 0, convient

$$|u \quad | \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \sqrt{-} \quad \frac{}{\sqrt{2}}$$

Revenons à (1), prenons $\frac{}{\sqrt{2}}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et p n, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que (u_n) n'est pas une suite de Cauchy. Par conséquent

2.

a)

$$\sqrt{n} \quad \sqrt{n} \quad \frac{(\sqrt{n} \quad \sqrt{})(\sqrt{} \quad \sqrt{})}{\sqrt{n} \quad \sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n} \quad \sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n} \quad \sqrt{n}}$$

D'autre part

$$\sqrt{n} < \sqrt{} \quad 2\sqrt{n} \quad \sqrt{n} \quad \sqrt{n} \quad \sqrt{n} \quad \frac{}{2\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n} \quad \sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{}{\sqrt{n}} \quad 2(\sqrt{n} \quad \sqrt{}) \quad \frac{}{\sqrt{n} \quad \sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

b) On applique le 2.a pour tout $\{1 \quad n\}$

Première méthode

$$\frac{}{\sqrt{k}} \quad 2(\sqrt{k} \quad \sqrt{}) \quad \frac{}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{}{\sqrt{1}} \quad 2(\sqrt{1} \quad \sqrt{}) \quad \frac{}{\sqrt{1}}$$

$$\frac{}{\sqrt{2}} \quad 2(\sqrt{2} \quad \sqrt{}) \quad \frac{}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{}{\sqrt{(n \quad 1)}} \quad 2\left(\sqrt{(n \quad 1)} \quad \sqrt{}\right) \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{}{\sqrt{n}} \quad 2(\sqrt{n} \quad \sqrt{}) \quad \frac{}{\sqrt{n}}$$

Puis on fait la somme de ces n lignes

$$\frac{}{\sqrt{n}} \quad 2(\sqrt{n} \quad \sqrt{})$$

En simplifiant tous les termes qui se simplifient

L'inégalité de droite donne l'inégalité de gauche demandée $2(\sqrt{n} \quad \sqrt{})$

Et l'inégalité de gauche

$$\frac{}{\sqrt{n}} \quad 2(\sqrt{n} \quad \sqrt{}) \qquad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \sqrt{n}$$

$$\frac{2(n \quad 1)}{\sqrt{n}} \qquad \frac{}{\sqrt{n}}$$

Il faudrait montrer que pour tout $\mathbb{N}$,

$$\frac{}{\sqrt{n+}} \quad \sqrt{n} \qquad \sqrt{\;(\quad 1)} \quad (2 \quad 1)$$

Seulement voilà, c'est faux !

Alors au lieu de faire la somme des premières lignes on va faire la somme des premières lignes en ne gardant que l'inégalité de gauche.

$$2(\sqrt{n} \quad 1)$$

Ce qui entraine que

$$2\sqrt{n}$$

Et voilà. On a bien pour tout 1.

$$2\sqrt{n} \qquad \sqrt{n}$$

c) On divise ces inégalités par $\sqrt{\ }$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \frac{}{\sqrt{n}} \quad \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$2\sqrt{\frac{}{}} \quad \frac{}{\sqrt{n}} \qquad \frac{}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

1. Pour $p = 1$,

$$(H\ ) \qquad \frac{}{(n \quad 1)} - \frac{}{}$$

Pour montrer cela on va calculer

$$- \frac{}{} \quad \frac{}{(n+1)} \quad \frac{(n \quad 1) \quad n(n \quad 1)}{n(n \quad 1)} \quad \frac{}{n(n \quad 1)} \quad \frac{}{n(n \quad 1)}$$

Ce qui montre que

$$\frac{}{(n \quad 1)} - \frac{}{}$$

Montrons que (H_p) entraine $(H \quad)$

$$\frac{}{(n+1)^2} \quad \frac{}{(n+p)^2} \quad \frac{}{(n+ \quad 1)} - \frac{}{} \quad \frac{}{(n \quad 1)}$$

Il faut montrer que cette expression est majorée par

$$- \frac{}{}$$

Pour cela nous allons calculer la différence

$$- \frac{}{} \left(- \frac{}{} \quad \frac{}{(n \quad 1)}\right) \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{(n \quad 1)}$$

$$\frac{-(n \quad 1)(n \quad p) \quad (n \quad 1) \quad (n \quad p)}{(n \quad p)(n \quad 1)}$$

$$\frac{(n \quad 1)[-(n \quad p) \quad (n \quad 1)] - (n \quad p)}{(n \quad p)(n \quad 1)} \quad \frac{(n \quad 1) - (n \quad p)}{(n \quad p)(n \quad 1)}$$

$$\frac{}{(n \quad p)(n \quad 1)}$$

Donc

$$- \frac{}{} \quad \frac{}{(n+ \quad 1)} - \frac{}{}$$

En fait on aurait pu utiliser (H_1) en changeant n en $(n \quad p)$

Par conséquent

$$\frac{}{(n+1)} \quad \frac{}{(n \quad p)} \quad \frac{}{(n \quad 1)} - \frac{}{}$$

Ce qui montre que (H_p) entraine $(H \quad)$,

Et finalement

$$\overline{(n+1)} \qquad \overline{(n \quad p)} \quad - \quad \overline{\qquad}$$

2.

On rappelle que $(u \ )$ est une suite de Cauchy si

$$|u \qquad |$$

On choisit un quelconque, et N tel que $-$

Pour tout n $\mathbb{N}$, et pour tout

$$|u \qquad | = \left|1 \quad — \quad — \quad — \quad \overline{(n \quad 1)} \qquad \overline{(n \quad p)} \quad \left(1 \quad — \quad — \quad —\right)\right|$$

$$\left|\frac{}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{}{(n+p)^2}\right| \quad \overline{(n+1)^2} \qquad \overline{(n+p)} \quad - \quad \overline{\qquad} \quad - \quad -$$

Ce qui montre que cette est une suite de Cauchy, comme il s'agit d'une suite réelle elle converge.

On verra en L2 que sa limite est —.

Allez à : Exercice 31 :

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage