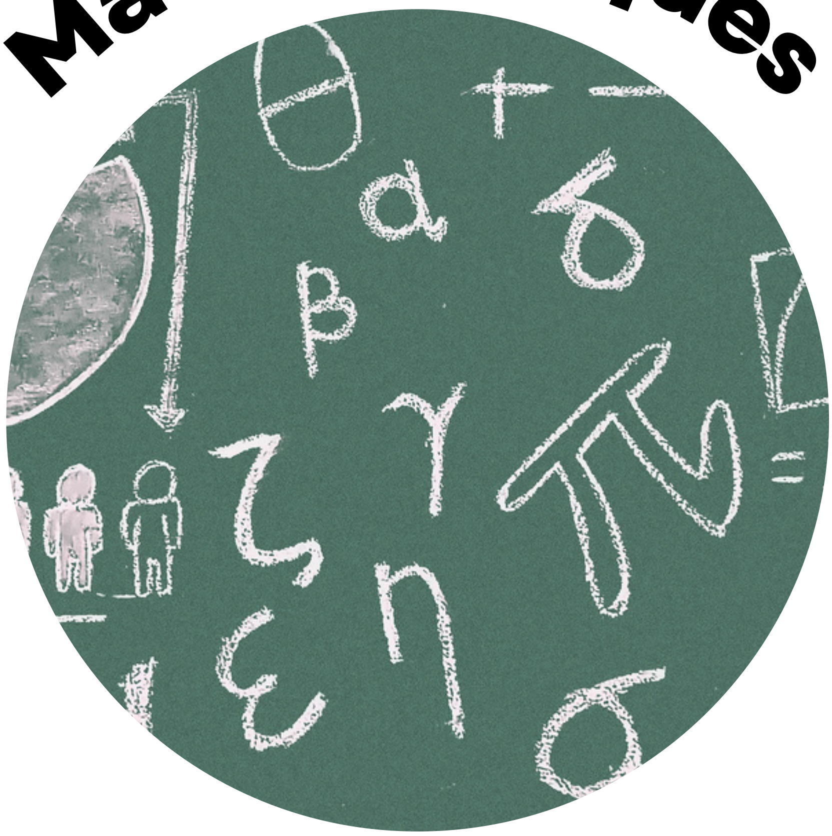
Mathématiques



SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

Année Universitaire 2014 – 2015
Département de Mathématiques
SVT1

Épreuve de Mathématiques

Exercice n°1 :

1) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}$
   a) Calculer U_1, U_2.
   b) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ? arithmétique ?

2) On définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n = U_n - 1$
   a) Calculer V_0
   b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n
   c) Exprimer V_n en fonction de n
   d) En déduite U_n en fonction de n
   e) V_n est-elle convergente ? Quelle est la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$?
   f) Déterminer la limite de U_n.

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$
   a) Déterminer l'expression de T_n en fonction de n
   b) En déduire S_n en fonction de n
   c) Quelle est la limite de T_n quand n tend vers $+\infty$?
   d) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

4) Une suite bornée est-elle toujours convergente ? Justifier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$
   a) Donner le domaine de définition de f.
   b) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
   c) Montrer que f est prolongeable par continuité au point 0 et donner son prolongement g.
   d) Montrer que g est dérivable au point 0.
   e) Donner l'équation de la tangente de la fonction g au point 0.

Exercice n°3 :

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'inégalité suivante :
$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$; a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$

Exercice ① :

1) a) $U_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$

$U_2 = \frac{4}{3}$

b) * Supposons que U_n est Géométrique

$$\begin{cases} U_{n+1} = q \cdot U_n \\ U_n = q^n \cdot U_0 \end{cases}$$ NB :

$U_2 = q \cdot U_1 \Rightarrow q = \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow q = \frac{8}{3}$

$U_1 = q \cdot U_0 \Rightarrow q = \frac{U_1}{U_0} \Rightarrow q = \frac{16}{3}$ $\neq$

Donc U_n n'est pas Géometrique.

* Supposons que U_n est Arithmétique.

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + r \\ U_n = U_0 + nr \end{cases}$$ NB :

$U_2 = U_1 + r \Rightarrow r = U_2 - U_1 \Rightarrow r = \frac{-2}{3}$

$U_1 = U_0 + r \Rightarrow r = U_1 - U_0 \Rightarrow r = -2$ $\neq$

Donc U_n n'est pas Arithmetique

C/C U_n est ni arithmetique ni Géométrique.

2) a) $V_0 = U_0 - 1 = 3$

b) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1$

$= \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} - 1$

$= \frac{1}{3} U_n - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} (U_n - 1) = \frac{1}{3} V_n$

①

c) D'apres le question 2) b On a

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$$

alors V_n est Géometrique.

$$V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot V_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

d)

$$V_n = U_n - 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = U_n - 1$$

$$U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1$$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 1}$$

e) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{3} V_n - V_n = V_n \left(\frac{1}{3} - 1\right)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 0$

et $\left(\frac{1}{3} - 1\right) < 0$

Don $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - 1\right) < 0$

Donc V_n est décroissante.

$V_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ quand n tend vers $+\infty$

(2)

$$\frac{1}{3^{n-1}} \longrightarrow 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n \geq 0$

Donc V_n est minorée par 0
et puisque V_n est decroissante minorée Donc V_n convergente.

et quand V_n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$$

$$V_n = U_n - 1$$
$$U_n = V_n + 1$$

f) $V_n = U_n - 1$

$$(\lim V_n) = (\lim U_n) - 1$$
$$\lim U_n = \lim (V_n) + 1$$
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

3) $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
et $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

a) $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
$$= \sum_{K=0}^{n} V_K = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{(3)^{K-1}}$$

b) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
$$= \sum_{K=0}^{n} U_K$$
$$= \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{3^{K-1}} + 1$$

c) $T_n = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{(3)^{K-1}}$

$$\lim T_n = \lim \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{3^{K-1}} = 0$$

$$\boxed{\lim T_n = 0}$$

3

d) $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k - 1} + 1$

$$\lim_{n \to +\infty} S'_n = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k}-1} + 1$$

$$= \lim \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k - 1} \right) + 1$$

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k}-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k}-1} + 1 = 1$$

$$\lim \boxed{S_n = 1}$$

4) * Supposons U_n une suite bornée

Donc $m \leq U_n \leq M$

$|U_n| < M$

* $m \leq U_n$ supposons U_m decroissant

U_n est convergente

* $U_n \leq M$ Supposons U_n croissante

U_n est convergente

C/c Donc si U_n est bornée $\Rightarrow$ U_n est convergente

* $\Leftarrow$ U_n est convergente $\Rightarrow$ U_n est bornée

$\forall \varepsilon \geq 0$, Tq $n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

Exercice (2) :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$x \longrightarrow x^n \left\{ \begin{array}{l} \text{Continue} \\ \text{definie} \\ \text{derivable} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Dans $\mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{1}{x} \left\{ \begin{array}{l} \text{Continue} \\ \text{definie} \\ \text{derivable} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Dans $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0$

$x \longrightarrow \sqrt{x} \left\{ \begin{array}{l} \text{Continue} \\ \text{definie} \\ \text{derivable} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Dans $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

1) $x \longrightarrow \sqrt{1+x^2}$ / $1+x^2 \geq 0$

$x^2 \geq -1 \Rightarrow x > 0$

$x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ | $1-x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$x \longrightarrow \frac{1}{x}$ | $x \neq 0$

$D_f =]0, 1]$

b) f continue sur $]0, 1]$

c) $\varphi \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{tq } 0 < x \leq 1 \\ \varphi(0) = 0 & x = 0 \end{array} \right.$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} = 0$$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x \to 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x} - 0}{x - 0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$= 0 \in \mathbb{R}$$

$\neq \pm\infty$ n'est pas derivable

$\Rightarrow$ que $g(x)$ est derivable au point 0

e)

exercice n°3 :

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

posons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, +\infty[$

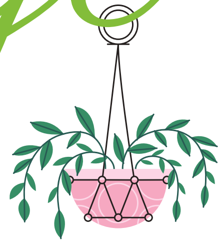
poson $a \leq x \leq b$

$f(x)$ continue sur $[a, b]$

" derivable sur $]a, b[$

$\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a}$

Bon courage



LIENS UTILES

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage