



# Physique Appliquée à la Géologie

STU S3



## Shop

- Cahiers de Biologie + Lexique
- Accessoires de Biologie



## Etudier

Visiter [Biologie Maroc](http://www.biologie-maroc.com) pour étudier et passer des QUIZ et QCM en ligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.



## Emploi

- CV • Lettres de motivation • Demandes...
- Offres d'emploi
- Offres de stage & PFE



Université Sidi Mohamed ben Abdellah  
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz — Fès  
**Département de Géologie**



# **Physique Appliquée à la Géologie (Cours)**

## **STU — S3**

(Version mise à jour)

**Pr. Abdelkrim AHARMOUCH**

**Année Universitaire : 2017—2018**



# Chapitre 1

## LA BOITE A OUTILS

### 1. Fonctions à valeurs scalaires

#### 1.1. Fonctions de points à valeurs scalaires

On peut étendre la notion de fonction au cas où la connaissance des valeurs de  $n$  variables est nécessaire.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $f$  étant à valeurs scalaires.

On définit 2 types de scalaires :

- un vrai scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dont le signe est indépendant du référentiel. Par exemple : la masse, la pression la température le potentiel électrique,...etc.
- un pseudo scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$  mais dont le signe dépend du référentiel. Par exemple le moment d'une force.

En physique il existe des fonctions à valeurs scalaires qui sont définies en tout point de l'espace :  $M(u, v, w) \mapsto f(u, v, w) \in \mathbb{R}$ . Ce sont des fonctions de point. On les note :

$$f(u, v, w) ; f(M) \text{ ou } f(\overline{OM})$$

Exemples :

La pression  $P$ , la température  $T$ , le potentiel électrique  $V$ , ...etc.

Si on définit dans une région de l'espace une fonction de points à valeurs scalaires, on dit qu'on a un **champ de scalaire**.

Pour le caractériser, on prend  $f(M) = Cte$  et on définit une surface de niveau ou (**une surface équipotentielle**).

*Exemple :*

$\forall M \in L'espace$ ,  $O$  un point fixe (l'origine). La position de  $M$  par rapport à  $O$  est définie par :  $OM = r$ . On cherche l'équipotentielle correspondant à la fonction scalaire définie par :

$$f(M) = \frac{2}{r}.$$

Pour cela on résout l'équation :  $f(M) = \frac{2}{r} = Cte$ .

On trouve :  $r = C'(constante)$ . C'est l'équation d'une sphère. L'équipotentielle est donc une sphère de rayon  $r$ .

#### 1.2. Différentielles et Dérivées

Soit  $f$  une fonction réelle d'une variable réelle :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

On dit que  $f$  est différentiable au point  $x_0$  s'il existe une application linéaire  $h \mapsto lh$  et une fonction  $h \mapsto \alpha(h)$  définie sur un intervalle  $I$  de centre zéro telles que :

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0. \tag{1}$$

L'application  $h \mapsto lh$  est appelée fonction linéaire tangente à la fonction  $f$  au point  $x_0$ . On la note  $df_{x_0}$ . Le nombre  $l$  s'appelle le coefficient de la différentielle de  $f$  au point  $x_0$ . Nous avons donc pour tout  $h$  réel :

$$df_{x_0}(h) = lh \tag{2}$$

Il résulte de la définition qu'une fonction  $f$  différentiable en  $x_0$  est définie sur un intervalle ouvert centré sur  $x_0$  et vérifiant (1) :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l + \alpha(h)h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0. \tag{3}$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \tag{4}$$

Réciproquement si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$  on peut trouver une fonction  $\alpha$  telle que :

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - l \quad \text{sur un intervalle } I \text{ de centre } 0 \text{ (exclu) et telle que } \alpha(0) = 0.$$

Nous avons alors :

$$(\forall h \in I) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h \tag{5}$$

$\alpha$  étant définie sur  $I$  et telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0$

Nous voyons donc que la recherche de la fonction linéaire tangente à  $f$  en  $x_0$  ( $h \mapsto lh$ ) revient à la recherche de la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{6}$$

Dire que  $f$  est différentiable en  $x_0$  équivaut à dire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l$ . Cette limite est le coefficient de la différentielle en  $x_0$ . C'est aussi la dérivée de  $f$  au point  $x_0$  et on dit que  $f$  est **dérivable** en  $x_0$ . On note  $f'(x_0) = l$ .

*Interprétation géométrique de la dérivée et de la différentielle.*

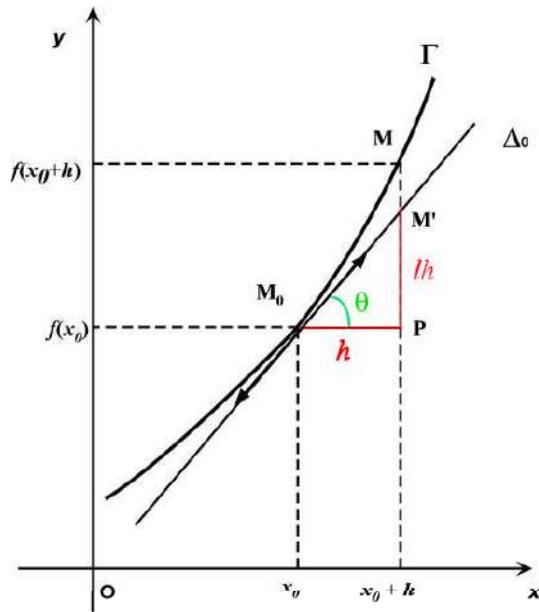


Figure 1. Dérivée et différentielle.

L'équation de la tangente  $\Delta_0$  en  $x_0$  est donnée par :

$$y - f(x_0) = l(x - x_0) \quad (7)$$

De (1) on peut voir que si  $l \neq 0$ ,  $lh$  est une valeur approchée de  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  pour  $h$  "petit", soit géométriquement (Figure 1) :

$$\overline{PM} \simeq \overline{PM'} \quad (8)$$

$\overline{PM'} = lh$  est la valeur de la différentielle de  $f$  au point  $x_0$  pour un accroissement  $h$  de la variable  $x$ .

Le calcul de la différentielle est utile aux calculs d'incertitudes. En effet on peut apprécier l'erreur commise sur une quantité physique  $f(x)$  dès lors que l'on connaît l'erreur commise sur la variable  $x$  dont elle dépend suivant la loi :  $df(x) = f'(x)dx$ .

*Exemple :*

Calcul de l'erreur sur l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dt} = mv\gamma$$

Donc connaissant l'erreur commise sur la mesure du temps  $t$ , on peut connaître l'erreur commise sur l'énergie  $E$ . Nous obtenons :

$$\Delta E = mv\gamma\Delta t$$

### 1.3. Différentielles et dérivées de fonctions de plusieurs variables

Comme pour des fonctions à une seule variable, on peut aussi définir des différentielles et des dérivées de fonctions à plusieurs variables.

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction et  $x, y, z$  de 3 variables indépendantes. On définit la dérivée par rapport à  $x$  par exemple de la façon suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = f'_x(x_0) \quad (9)$$

On définira les dérivées par rapport à  $y$  et  $z$  de la même façon que pour  $x$ . Ces dérivées sont dites des dérivées partielles premières (ou de premier ordre) par rapport à  $x, y$  et  $z$  et sont notées respectivement :  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  ou  $f'_x, f'_y, f'_z$  ou encore  $\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f$ .

*Exemple :*

$$f(x, y) = 2x^2 \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \ln y \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y}$$

*La différentielle dans le cas d'une fonction de plusieurs variables.*

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction et  $x, y, z$  de 3 variables indépendantes. La différentielle est obtenue de la façon suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (10)$$

*Les dérivées d'ordre supérieur :*

◆ Pour une seule variable :

$$f'_x = \frac{df}{dx}, \quad f''_x = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (11)$$

◆ Pour plusieurs variables :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \dots \quad (12)$$

**Remarque**

L'ordre des dérivations peut être changé sans que pour autant le résultat change. Nous aurons alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\end{aligned}\tag{13}$$

*Exemple :*

$$f(x, y) = 2x^2 \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{y}$$

## 2. Fonctions à valeurs vectorielles

### 2.1. Grandeurs vectorielles

Une grandeur vectorielle est caractérisée par un nombre (l'intensité, la norme), une direction et un sens. Par exemple la vitesse d'un mobile, la pesanteur, le champ électrique, le champ magnétique, ...etc. On distingue :

- Un vecteur libre : un vecteur n'ayant pas une origine fixe.
- Un vecteur glissant : un vecteur dont l'origine est quelconque sur un support.
- Un vecteur fixe : un vecteur ayant une origine fixe.
- Un vecteur polaire : un vecteur dont le sens est indépendant du référentiel
- Un vecteur axial : un vecteur dont le sens est lié au référentiel

*Notation :*

On note un référentiel  $\mathfrak{R}(o, \overrightarrow{ou_1}, \overrightarrow{ou_2}, \overrightarrow{ou_3})$  ou  $\mathfrak{R}(o, B(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}))$

Un référentiel direct  $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$  (Figure 2) est celui pour lequel :  $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$ .

**La règle de la main droite** permet de savoir si un trièdre est direct ou pas (en ramenant les quatre doigts de la main droite (représentant le premier vecteur) sur la paume (représentant le deuxième vecteur), le troisième vecteur est alors indiqué par le pouce.

On peut aussi utiliser **la règle du bonhomme d'Ampère** : celui-ci est traversé des pieds vers la tête par l'axe  $\vec{e}_3$ , en regardant  $\vec{e}_1$ , l'axe porté par le vecteur  $\vec{e}_2$  sera indiqué par sa gauche.

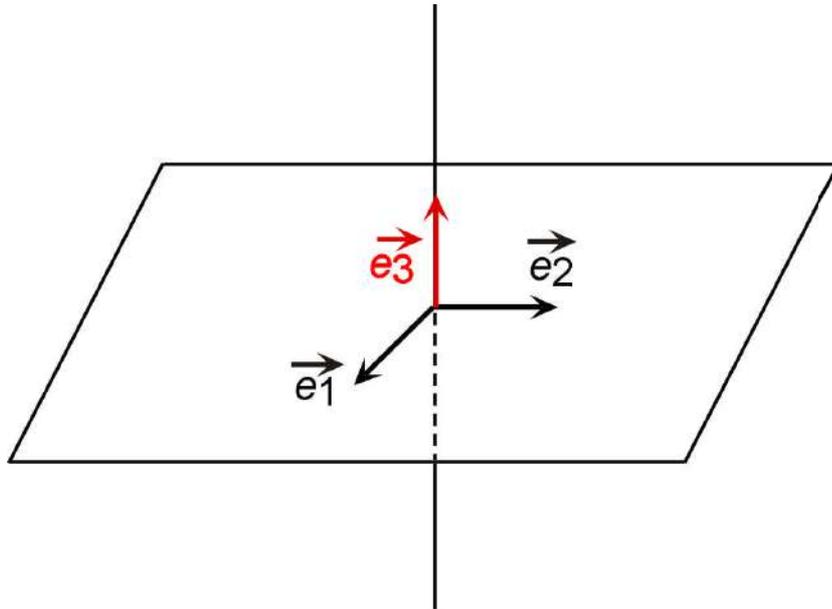


Figure 2 : Un trièdre direct

## 2.2. Principaux systèmes de coordonnées

### 2.2.1. Le système de coordonnées cartésiennes

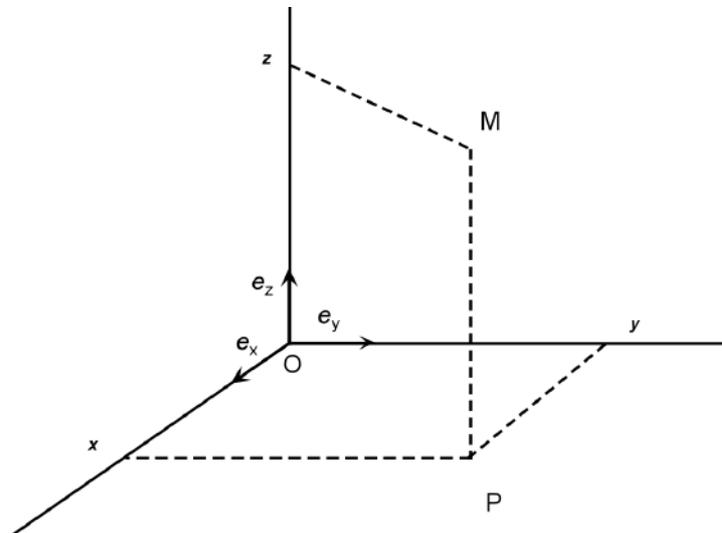


Figure 3. Coordonnées cartésiennes

Un point  $M$  de l'espace est repéré par les 3 composantes du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  (Figure 3). Nous avons donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (14)$$

$P$  est la projection de  $M$  sur le plan  $xOy$ .

Un déplacement **élémentaire** du point M dans l'espace amènera celui-ci en M' voisin de M (Figure 4).

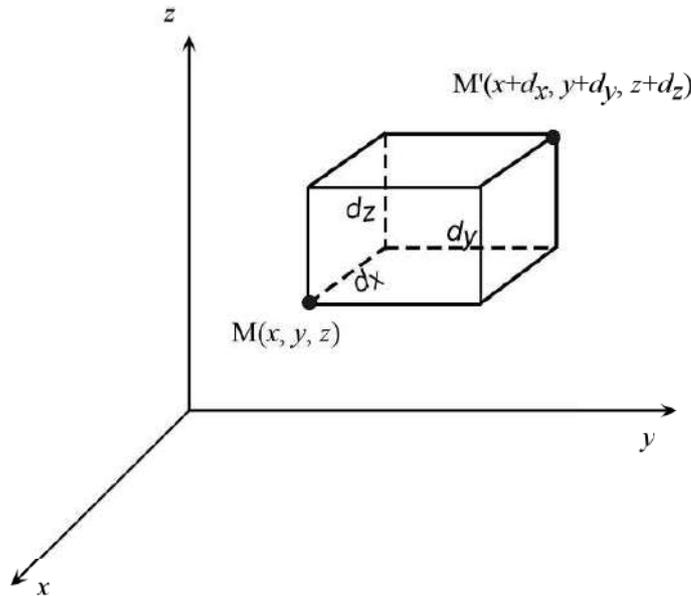


Figure 4. Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

L'expression du vecteur déplacement  $\overline{MM'}$  dans le repère considéré est donnée par :

$$\overline{MM'} = dx\overline{e}_x + dy\overline{e}_y + dz\overline{e}_z \quad (15)$$

$dx, dy, dz$  sont des variations infinitésimales des grandeurs  $x, y, z$  respectivement.

Ou encore

$$d\overline{OM} = dx\overline{e}_x + dy\overline{e}_y + dz\overline{e}_z \quad (16)$$

### 2.2.2. Le système de coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques on considère le point appartenant à un cylindre dont l'axe est  $Oz$  du repère cartésien. Le point M (Figure 5) est repéré par :

- Le rayon  $\rho$  du cylindre auquel il appartient.
- La mesure  $\varphi$  de l'angle  $(\widehat{Ox, OP})$ . P étant la projection du point M sur le plan  $xOy$ .
- La cote  $z$  par rapport au plan de référence  $xOy$ .

Les coordonnées du point M ou du vecteur  $\overline{OM}$  sont exprimées par rapport à un repère orthonormé local  $(\overline{e}_\rho, \overline{e}_\varphi, \overline{e}_z)$  lié au point M. Les vecteurs de la base sont définis comme suit :

- Le vecteur unitaire  $\overline{e}_\rho$  est parallèle à  $\overline{OM}$ .
- Le vecteur  $\overline{e}_\varphi$  est parallèle au vecteur tangent en P au cercle de rayon  $OP = \rho$  et contenu dans le plan  $xOy$ .
- Le vecteur  $\overline{e}_z$  est parallèle à l'axe  $Oz$

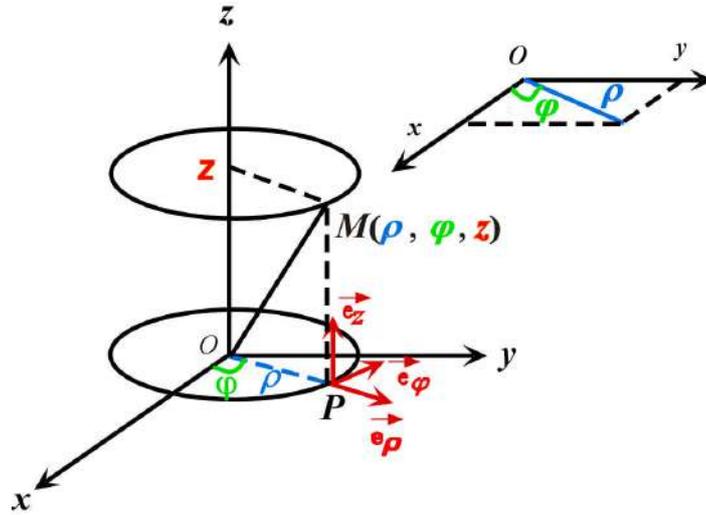


Figure 5. Système de coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes (Figure 5) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (17)$$

L'expression du vecteur déplacement élémentaire (Figure 6) dans le repère  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  est donnée par :

$$\overrightarrow{MM'} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (18)$$

Ou encore

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (19)$$

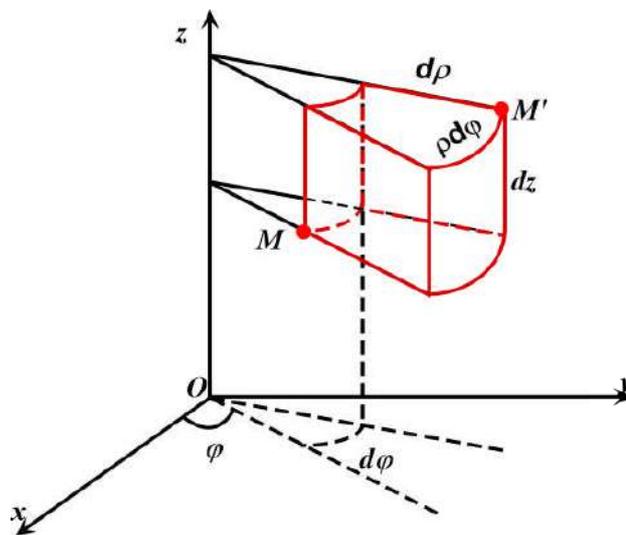


Figure 6. Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

Le même résultat peut être retrouvé en différenciant  $\overline{OM}$  ou en calculant  $\overline{OM}' - \overline{OM}$  (A retrouver par le calcul en TD).

Le volume élémentaire est par conséquent :

$$d\tau = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz \quad (20)$$

### 2.2.3. Le système de coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques on considère le point appartenant à une sphère centrée sur O. Le point M (Figure 7) est repéré par :

→ Le rayon  $r$  de la sphère à laquelle il appartient.

→ La mesure  $\theta$  de l'angle  $(\overline{Oz}, \overline{OM})$ .

→ La mesure  $\varphi$  de l'angle  $(\overline{Ox}, \overline{OP})$ . P étant la projection du point M sur le plan  $xOy$ .

Les coordonnées du point M ou du vecteur  $\overline{OM}$  sont exprimées par rapport à un repère orthonormé local  $(\overline{e}_r, \overline{e}_\theta, \overline{e}_\varphi)$  lié au point M. Les vecteurs de la base (Figure 7) sont définis comme suit :

■ Le vecteur unitaire  $\overline{e}_r$  est parallèle à  $\overline{OM}$ .

■ Le vecteur unitaire  $\overline{e}_\theta$  est parallèle au vecteur tangent en M au cercle de rayon  $OM = r$ , décrit dans le plan contenant les vecteurs  $\overline{OQ'}$ ,  $\overline{OM}$  et  $\overline{OP'}$  et dirigé vers le Sud.

■ Le vecteur unitaire  $\overline{e}_\varphi$  est tangent en M au cercle de centre Q et de rayon  $QM = OP$ , contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$ , et est dirigé vers l'Est.

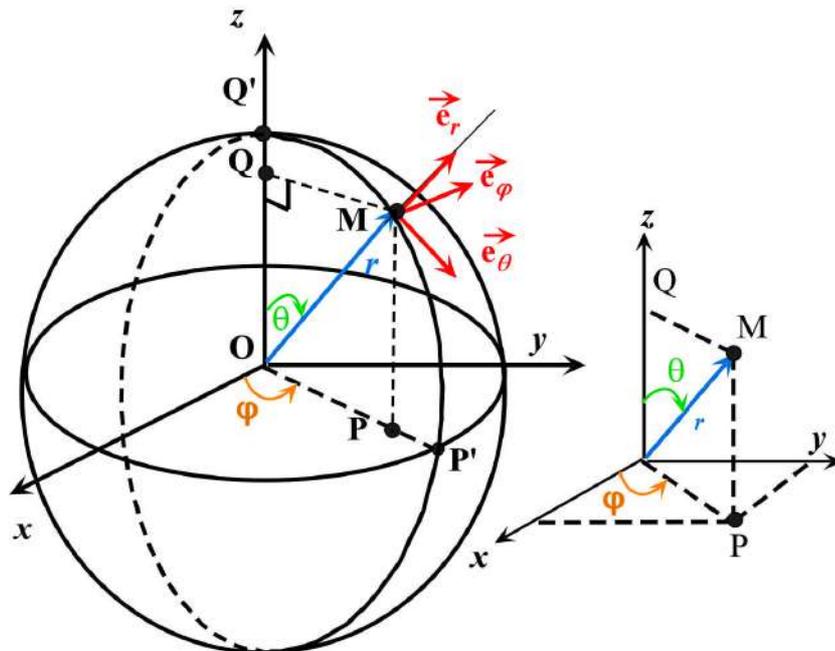


Figure 7. Système de coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes (Figure 7) :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (21)$$

L'expression du vecteur déplacement élémentaire (Figure 8) dans le repère  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  est donnée par :

$$\overline{MM'} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi \quad (22)$$

Ou encore

$$d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi \quad (23)$$

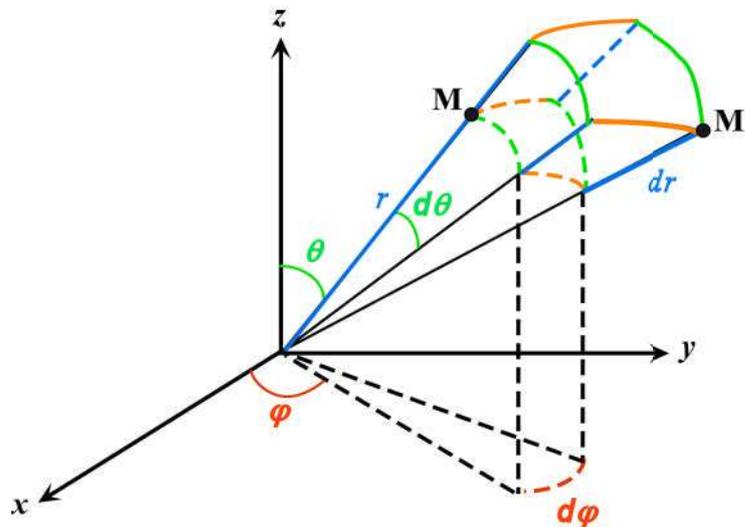


Figure 8. Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

Le même résultat peut être retrouvé en différenciant  $\overline{OM}$  ou en calculant  $\overline{OM'} - \overline{OM}$  (A retrouver par le calcul en TD).

Le volume élémentaire est par conséquent :

$$d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi \quad (24)$$

### 2.3. Opérations sur les vecteurs

■ La somme de deux vecteurs (Figure 9) :

$$\vec{u}(x, y, z) + \vec{v}(x', y', z') = \vec{w}(x+x', y+y', z+z') \quad (25)$$

■ La multiplication d'un vecteur par un scalaire (Figure 9) :

$$\lambda \vec{u}(x, y, z) = \vec{v}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad (26)$$

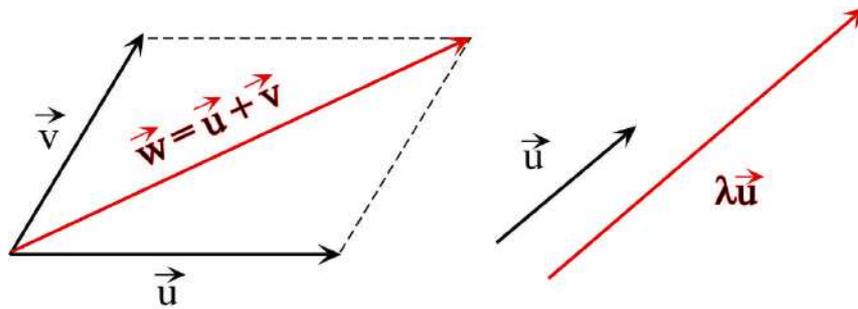


Figure 9. Opérations sur les vecteurs

## 2.4. Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Définies par :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \vec{V} \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}$$

## 2.5. Fonctions vectorielles de points

Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace et  $\vec{A}$  un vecteur de l'espace.

Soit la fonction :

$$M(x, y, z) \mapsto \vec{A}(M) \begin{pmatrix} A_1(x, y, z) \\ A_2(x, y, z) \\ A_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Une fonction définie de cette manière est une fonction de point. Nous définissons ainsi dans l'espace un champ de vecteurs.

*Exemples :*

La force, la vitesse, l'accélération, le champ électrique,.....

Si on veut caractériser un champ de vecteurs on trace des lignes de champs. Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ (Figure 10).

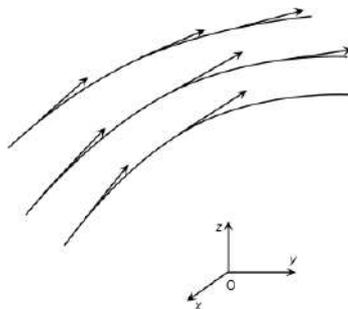


Figure 10. Lignes de champ

*Champ uniforme :*

C'est un champ caractérisé par une intensité constante et des lignes de champ parallèles (Figure 11).

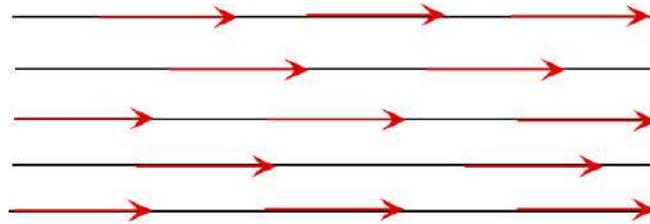


Figure 11. Champ uniforme

*Champ radial*

Ce champ est caractérisé par des lignes de champ concourantes (Figure 12).

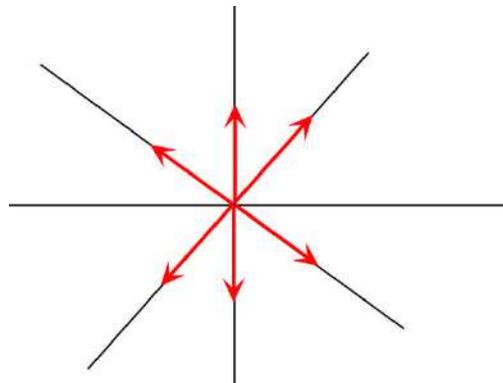


Figure 12. Champ radial

*Tube de champ*

Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour (Figure 13)

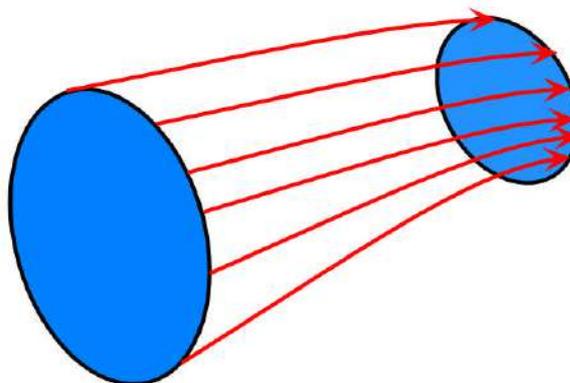


Figure 13. Tube de champ.

## 2.6. Les opérateurs différentiels

Les opérateurs différentiels assurent le passage d'un champ à un autre.

### 2.6.1. Le Gradient :

Cet opérateur permet de passer d'un champ scalaire  $f$  à un champ vectoriel  $\overrightarrow{\text{grad}}f$ , défini comme suit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Qu'on note aussi  $\nabla f$ , où  $\nabla$  désigne l'opérateur **nabla** défini par :  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

La différentielle de  $f(x, y, z)$  :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (26)$$

Soit

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{dl} \quad (27)$$

### 2.6.2. La divergence

Cet opérateur permet de passer d'un champ vectoriel  $\overrightarrow{A}(A_x, A_y, A_z)$  à un champ scalaire  $\text{div}\overrightarrow{A}$  défini par :

$$\text{div}\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (28)$$

Qu'on note aussi  $\nabla \cdot \overrightarrow{A}$  (produit scalaire de  $\nabla$  et du vecteur  $\overrightarrow{A}$ ).

### 2.6.3. Le rotationnel

Le rotationnel permet de passer d'un champ de vecteurs à un autre champ de vecteurs défini par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Ce vecteur peut être retrouvé en effectuant le produit vectoriel de l'opérateur nabla et du vecteur  $\vec{A}$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A} \quad (30)$$

#### 2.6.4. Le Laplacien

Cet opérateur Permet de passer d'un champ de scalaires à un champ de scalaires de la manière suivante :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (31)$$

Le Laplacien de  $f$  s'obtient aussi en calculant le produit scalaire de l'opérateur nabla par  $\nabla f$  .

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f \quad (32)$$

L'opérateur  $\Delta f$  se note aussi  $\nabla^2 f$  .

#### 2.6.5. Le Laplacien vectoriel

Cet opérateur permet de passer d'un champ vectoriel à un autre champ vectoriel par :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} \quad (33)$$

#### 2.6.6. Quelques combinaisons d'opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) &= \vec{0} \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) &= \Delta f \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{A} \end{aligned} \quad (34)$$

#### 2.7. Remarques

*Caractéristiques du gradient :*

➔ Le gradient est perpendiculaire à la surface de niveau (Figure 14) .

$M \in S, M' \in S, \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$

$S$  surface de niveau  $\Rightarrow f = \text{Cte}$

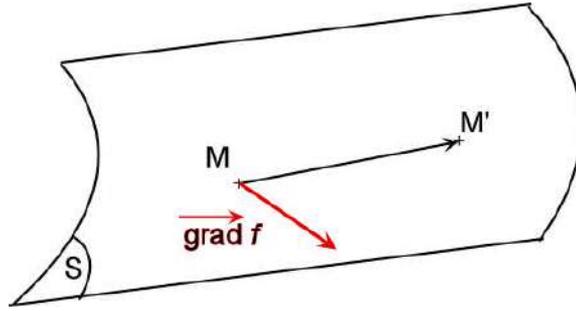


Figure 14. Position du gradient par rapport à une équipotentielle

$df = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot \overrightarrow{dl}$  et  $df = 0$  (car  $f$  est constante), par conséquent  $\overrightarrow{\text{grad} f} \perp \overrightarrow{dl}$ . Le gradient est donc perpendiculaire à la surface de niveau (CQFD).

→ Le gradient est orienté dans le sens des scalaires croissants (Figure 15)

$$df = \overrightarrow{\text{grad} f} \cdot \overrightarrow{dl} > 0$$

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ . Donc le gradient est de même sens que  $\overrightarrow{MM'}$  (CQFD).

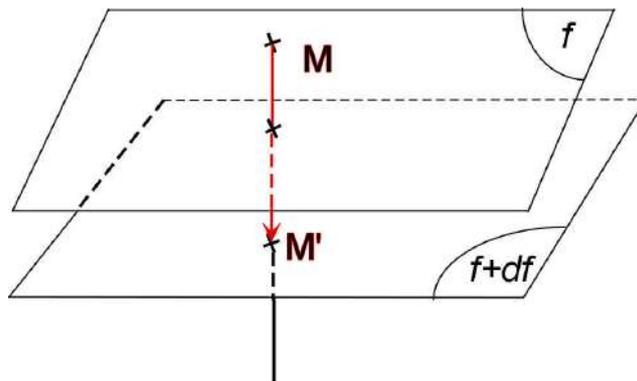


Figure 15. Orientation du gradient

*Champ vectoriel dérivant d'un potentiel*

Soit  $\vec{A}(M)$  un champ vectoriel. On dit que ce champ dérive d'un potentiel  $V(M)$  si :

$$\vec{A}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M)) \quad (35)$$

La condition pour qu'un champ  $\vec{A}$  dérive d'un potentiel est :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) = \vec{0} \quad (36)$$

Si  $V(M)$  est une solution alors  $V(M) + Cte$  en est une aussi.

*Potentiel vecteur*

Soit  $\vec{B}(M)$  un champ de vecteurs. On dit qu'il dérive d'un potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  si :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) \quad (37)$$

La condition pour que  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel vecteur est que :

$$\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0 \quad (38)$$

Si  $\vec{A}(M)$  est solution alors  $\vec{A}' = \vec{A} + \overline{\operatorname{grad} f}$  en est une autre.

### 3. Intégration

#### 3.1. Intégrale définie faisant intervenir une fonction d'une variable réelle.

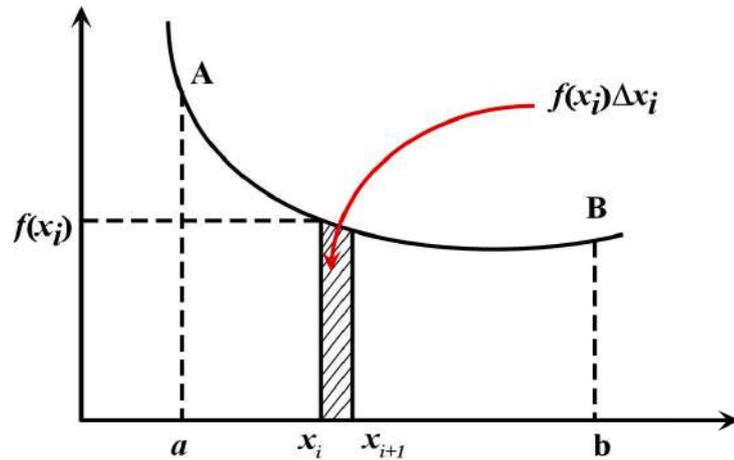


Figure 16. Principe de l'intégration

L'aire de la surface comprise entre la courbe AB, les verticales passant par A et B et l'axe des x (Figure 16) est donnée par :

$$\text{Aire} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (39)$$

#### 3.2. Intégrale faisant intervenir des fonctions de points

→ Intégrale curviligne

Soit  $f(M)$  une fonction scalaire de point définie au moins pour tout point de (C) (Figure 17).

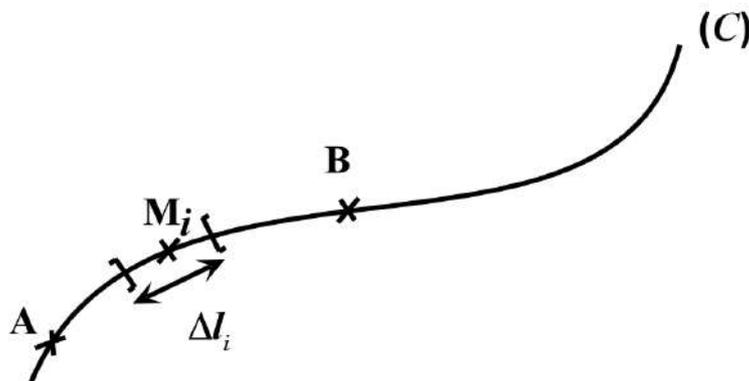


Figure 17. Intégrale curviligne

L'intégrale curviligne de  $f(M)$  le long de  $\widehat{AB}$  est donnée par :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \int_{\widehat{AB}} f(M) dl \quad (40)$$

Si  $f(M) = 1$ .  $\int_{\widehat{AB}} dl = \widehat{AB}$

Si A et B sont confondus, (C) est une courbe fermée, on note alors l'intégrale de la façon suivante :

$$\oint_{(C)} f(M) dl \quad (41)$$

→ Intégrales multiples

Soit  $f(M)$  une fonction scalaire de point définie au moins en tout point d'une surface (S) ou un d'un volume (V), on découpe sur (S) des  $\Delta S_i$  ou des sur (V) des  $\Delta V_i$  aux  $M_i$ . Les intégrales double et triple sont définies par :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(M_i) \Delta S_i &= \iint_{(S)} f(M) ds \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(M_i) \Delta V_i &= \iiint_{(V)} f(M) d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

3.3. Intégrales faisant intervenir des fonctions vectorielles de point

→ Circulation d'un vecteur le long d'une courbe

Soit  $\vec{A}(M)$  défini en tout point de (C) (Figure 18)

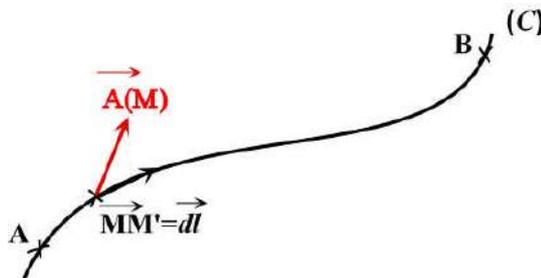


Figure 18. Circulation d'un vecteur le long d'une courbe.

On appelle circulation élémentaire de  $\vec{A}(M)$  la quantité  $dC = \vec{A} \cdot \vec{dl}$  La circulation le long de la courbe est alors :

$$C_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (43)$$

La circulation est dite conservative si l'intégrale sur une courbe fermée est nulle :

$$\oint_{(C, \text{fermé})} \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (44)$$

Soit  $\vec{A}$  un vecteur dérivant d'un potentiel V alors :

$$C_{\widehat{AB}} \vec{A} = \int_{\widehat{AB}} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dl} = \int_A^B -dV = V_A - V_B \quad (45)$$

$$C_{(C, \text{fermé})} \vec{A} = V_A - V_A = 0 \quad (46)$$

**Conclusion :**

Un champ de vecteurs  $\vec{A}$  dérive d'un potentiel si sa circulation le long d'une courbe fermée est nulle.

→ Flux d'un vecteur à travers une surface.

■ Flux à travers une surface quelconque (Figure 19)

L'orientation du vecteur  $\vec{n}$  est arbitraire

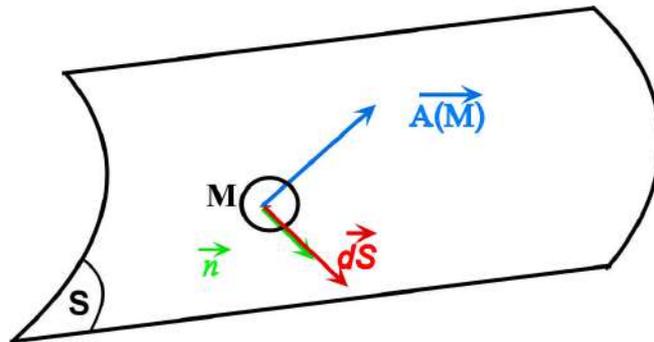


Figure 19. Flux à travers une surface quelconque

Flux élémentaire :

$$d\Phi(\vec{A})/_{dS} = \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (47)$$

Flux total :

$$\Phi(\vec{A})/_{S} = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (48)$$

■ Flux à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé (Figure 20)

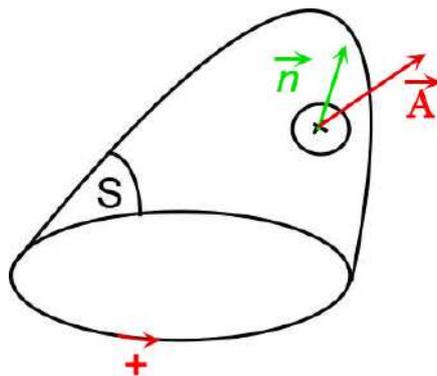


Figure 20. Flux à travers une surface s'appuyant sur un contour.

Dans ce cas l'orientation de la normale à la surface est choisie de façon judicieuse et est indiquée par la règle de la main droite.

■ Flux à travers une surface fermée (Figure 21).

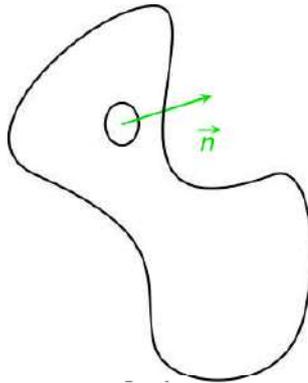


Figure 21. Flux à travers une surface fermée

Le vecteur normal est orienté de l'intérieur vers l'extérieur. On parle alors de flux sortant.

$$\Phi_{\vec{A}/S \text{ fermée}} = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{dS} \quad (49)$$

Si  $\Phi_{\vec{A}/S \text{ fermée}} = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot \vec{dS} = 0$ , on dira que le flux est conservatif

*Exemple*

Soit  $\vec{A}(M) = \overrightarrow{OM} \cdot f(OM)$  (Figure 22)

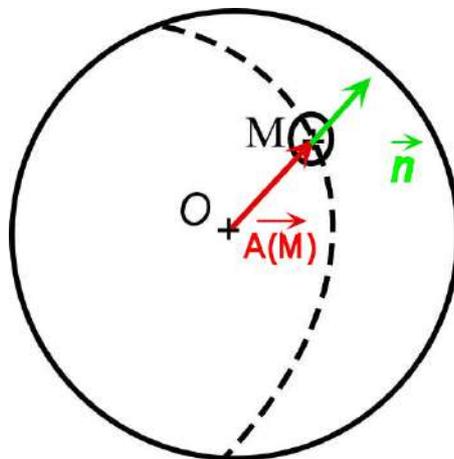


Figure 22. Flux à travers une sphère

Le flux sortant d'une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  est :

$$\vec{A} = \vec{R} \cdot f(R) \quad \forall M \in \text{Sphère}$$

$$\Phi_{\vec{A}/S \text{ fermée}} = \iint_{(S)} R \cdot f(R) \cdot dS = R \cdot f(R) \cdot 4\pi R^2$$

### 3.4. Angle solide

Dans le plan l'angle compris entre les deux côtés et l'arc (Figure 23) est donné par :

$$\theta = \frac{l}{R} \quad (50)$$

$\theta$  est exprimé en radian

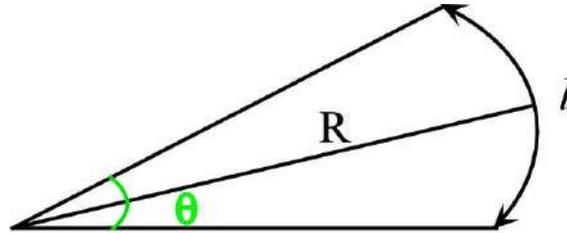


Figure 23. Angle plan

De façon similaire, l'espace cerné entre la base du cône et ses génératrices, une sorte d'angle "spatial" par opposition à l'angle plan. Cet angle spatial s'appelle angle solide (Figure 24) et est défini par :

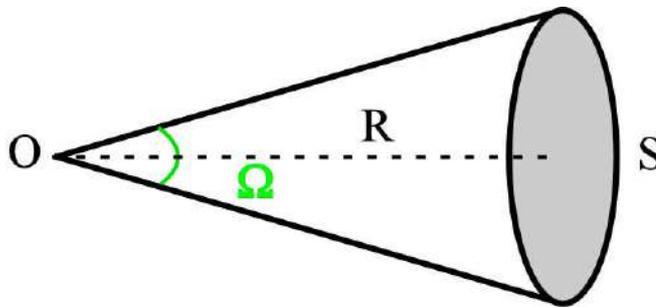


Figure 24. Angle solide.

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad (51)$$

$\Omega$  est exprimé en stéradian.

*Exemple*

Pour tout l'espace :

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

**→ Angle solide sous lequel on voit d'un point une surface**

On détermine d'abord l'angle solide élémentaire  $d\Omega$  sous lequel on voit la surface élémentaire  $dS$

Les surfaces élémentaires  $\overline{dS}$  et  $\overline{dS'}$  étant centrées sur le point M. L'angle solide sous lequel à partir du point O, on voit la surface élémentaire  $\overline{dS}$  est le même que pour la surface élémentaire  $\overline{dS'}$  (Figure 25). Nous avons donc :

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \vec{dS} = d\Phi \left( \frac{\vec{u}}{r^2} \right) /_{\vec{dS}} \quad (52)$$

L'angle solide total sera donné par :

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \vec{dS} \quad (53)$$

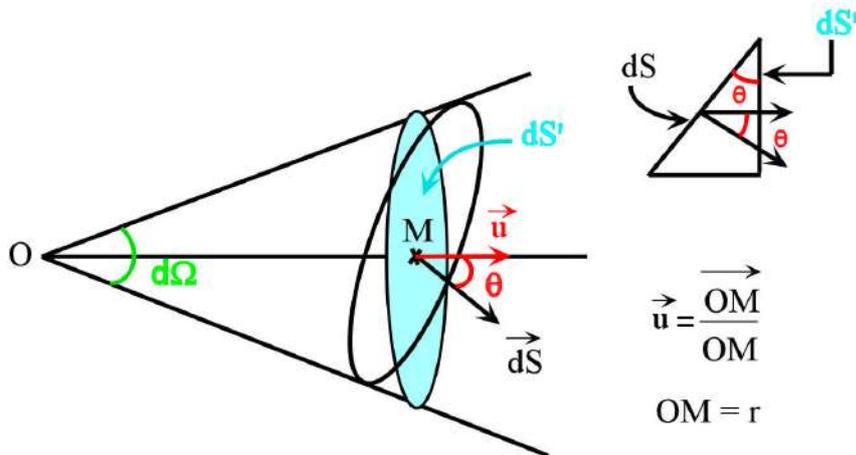


Figure 25. Angle solide sous lequel on voit d'un point une surface.

### 3.5. Transformation des intégrales

#### 3.5.1. Théorème de Green-Ostrogradski

$$\iint_{S \text{ fermée}} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V \text{ intérieur}} \text{div} \vec{A} \cdot d\tau \quad (54)$$

#### 3.5.2. Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_{\text{Surf app } \Gamma} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{dS} \quad (55)$$

-----Fin-----

## Chapitre 2

### ELECTRICITE ET APPLICATIONS A LA TERRE

#### 1. Loi fondamentale de l'électrostatique

##### 1.1. Les charges électriques

La base de l'électrostatique est l'existence de 2 classes de particules chargées (expérience de l'ébonite et du verre frottés contre un chiffon en tissu de laine par exemple) :

– La classe de l'électron : **les charges négatives**

– La classe du proton : **les charges positives**

Les charges électriques obéissent à 4 propriétés essentielles :

→ Deux charges d'une même classe se repoussent et deux charges de classes différentes s'attirent

→ La charge est un scalaire. La charge de l'électron est  $ch \bar{e} = -e$ .  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$  (le Coulomb est l'unité de la quantité d'électricité dans le système international SI)

→ La charge électrique est quantifiée  $\Leftrightarrow \forall q, \quad q = ke \quad k \in \mathbb{Z}$ , ce qui veut dire que la charge est une grandeur discontinue.

→ Dans un système isolé, il y a conservation de la charge (même en relativité)

##### 1.2. La loi de Coulomb

– Loi expérimentale valable depuis plusieurs kilomètres jusqu'à  $10^{-13}$  cm. (Si  $d < 10^{-13}$  cm  $q$  ne peut plus être considérée comme ponctuelle).

– L'énoncé de la loi :

Etant donné deux charge ponctuelles  $q$  et  $q'$  de même signe (Figure 1), la force exercée par l'une sur l'autre est donnée par la loi de Coulomb :

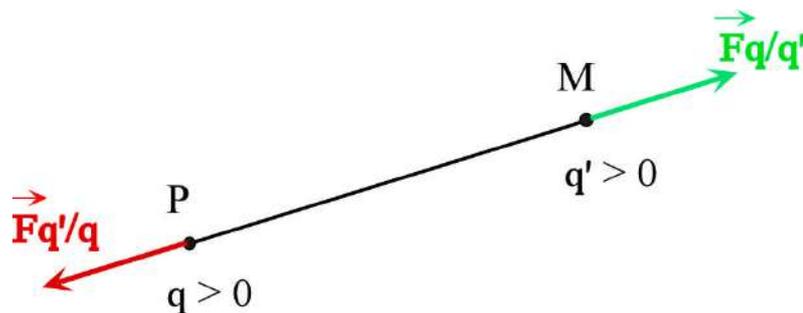


Figure 1. Loi de Coulomb.

$$\vec{F}_{q/q'} = kqq' \left( \frac{\vec{PM}}{PM^3} \right)$$

$$\vec{F}_{q/q'} = kqq' \left( \frac{\vec{u}}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}; \quad r = PM$$

La constante  $k$  dépend du système d'unité, du milieu dans lequel se trouvent les charges. Dans le système international :  $F$  (N),  $q$  (C),  $r$ (m) et le milieu étant le vide, la constante  $k$  vaut :

$$k = 9 \times 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{où} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}, \text{ la permittivité du vide}$$

Dans un milieu autre que le vide :  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ ;  $\epsilon$  étant la permittivité du milieu considéré .

$$F_{q/q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{PM}{PM^3} \quad (2)$$

### Comparaison avec la force de gravitation :

Deux différences sont décelées :

- En gravitation la répulsion n'a pas lieu
- La constante de gravitation ne dépend pas du milieu

### Vérification de l'expression de la loi de Coulomb :

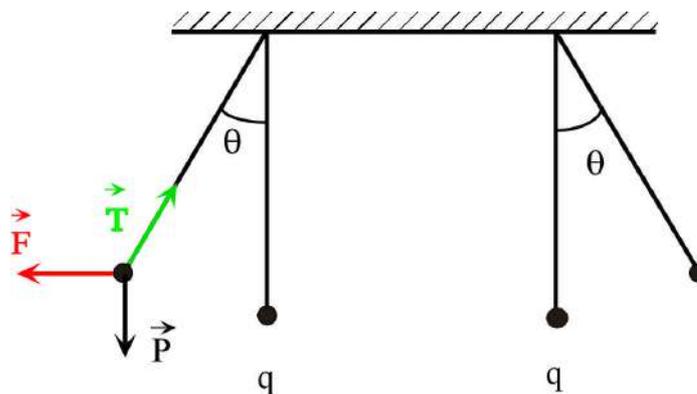


Figure 2. Vérification de la loi de coulomb

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0} \quad \tan \theta = \frac{F}{mg}$$

### 1.3. Principe de superposition

#### Enoncé :

L'effet produit par un ensemble de particules sur une autre est la somme des effets des particules prises séparément sur la particule considérée (Figure 3).

$$\vec{F}/q_1 = \vec{F}_{q_2/q_1} + \vec{F}_{q_3/q_1} \quad (3)$$

*Remarque :*

Ce principe est valable particulièrement en mécanique des milieux continus

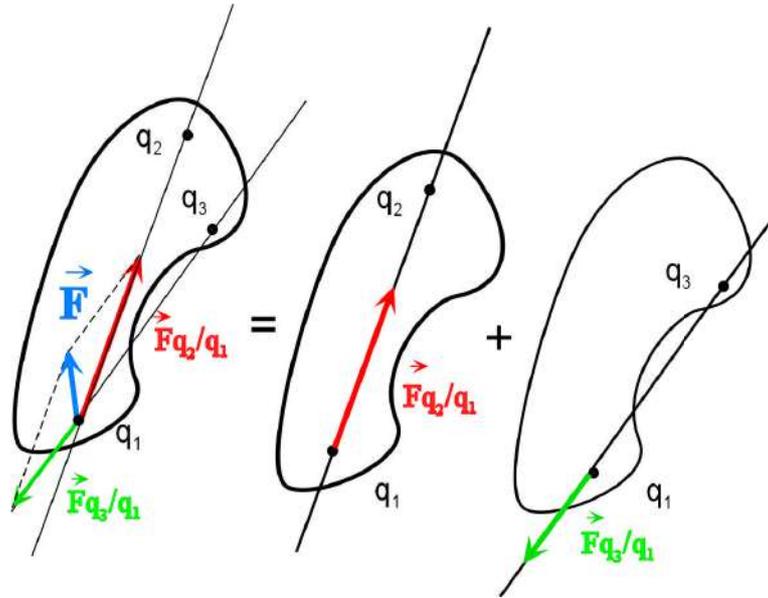


Figure 3. Principe de superposition.

#### *Distribution discrète de charges*

Soient une distribution de charge  $q_i(A_i)$  et une charge  $q(M)$  (Figure 4). On se propose de déterminer la force exercée par la distribution de charges  $q_i(A_i)$  sur la charge  $q(M)$ .

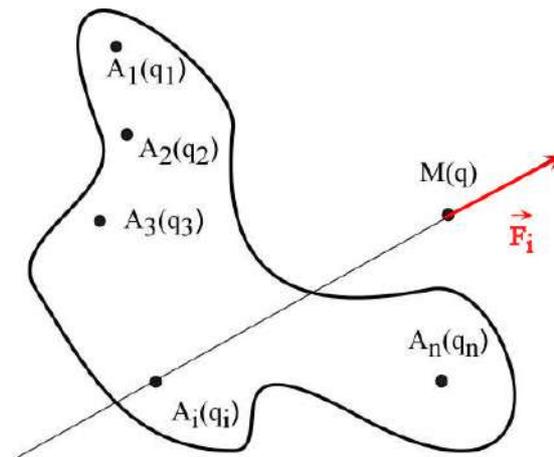


Figure 4. Distribution discrète de charges.

La force exercée par chaque charge  $q_i(A_i)$ , prise séparément, sur  $q(M)$  est donnée par :

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q \frac{\overrightarrow{A_i M}}{A_i M^3} \quad (4)$$

En vertu du principe de superposition, l'effet des charges  $q_i$  sur la charge  $q$  est donné par :

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\overrightarrow{A_i M}}{A_i M^3} \quad (5)$$

### *Distribution continue de charges*

Dans ce cas de figure la distribution de charges est continue (Figure 5).

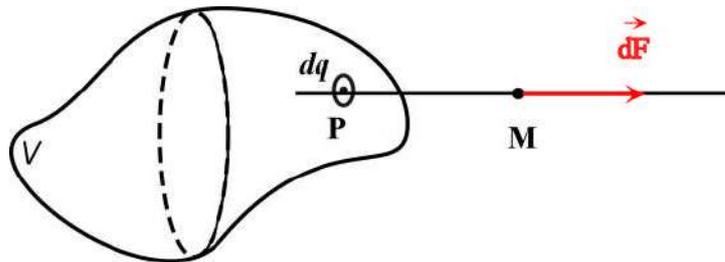


Figure 5. Distribution continue

L'effet (la force électrique) d'une charge élémentaire située en  $P$  sur la charge  $q_0(M)$  est donné par :

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (6)$$

L'effet total de toute la distribution de charges sera :

$$\vec{F} = \iiint_V d\vec{F} \quad (7)$$

## 2. Le champ électrostatique

### 2.1. Définition

On dit que dans une région de l'espace, il règne un champ électrostatique  $\vec{E}$  pour dire qu'une charge quelconque  $q_0$  placée en un point quelconque de cette région est soumise à une force  $\vec{F}$ , donnée par :

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (8)$$

Le champ  $\vec{E}$  en un point est simplement la force exercée sur une charge  $q_0 = 1$ , placée en M. Son unité est le *volt/m*.

### *Lignes de champ*

Les lignes de champ sont des lignes tangentes en chacun de leur point au vecteur champ (Figure 9).

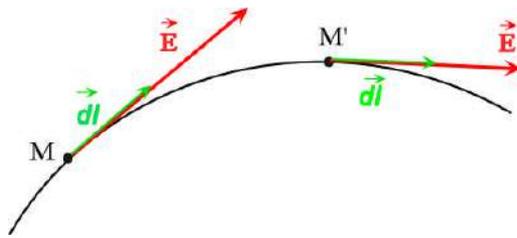


Figure 9. Lignes de champ

Ce sont des courbes vérifiant, en coordonnées cartésiennes, le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (9)$$

## 2.2. Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique créé au point M, par une charge ponctuelle  $q$  placée en P (Figure 10) est donné par :

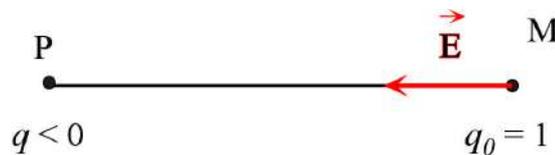


Figure 10. Champ créé par une charge ponctuelle.

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (10)$$

Question aux étudiants : Quelle est la configuration des les lignes de champs ? Considérer le signe de la charge.

## 2.3. Champ créé par une distribution discrète

Le champ électrostatique créé en un point  $M$  par une distribution discrète de charges (Figure 11) est égal la somme des champs créés en  $M$  par les charges de la distribution prises une à une (principe de superposition).

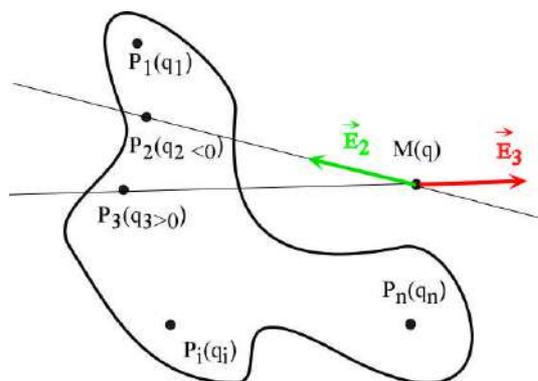


Figure 11. Champ électrostatique dû à une distribution discrète de charges

$$\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3} \quad (11)$$

## 2.4. Champ créé par une distribution continue de charges

On distinguera 3 cas de figure :

→ Cas où la distribution est linéique

Les charges sont réparties de façon continue le long d'une courbe (Figure 12) avec une densité linéique  $\lambda$ , qui représente la quantité de charge par unité de longueur. La quantité de charge élémentaire  $dq$ , contenue dans l'élément de longueur  $dl$ , centré sur  $P$ , obéit à :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (12)$$

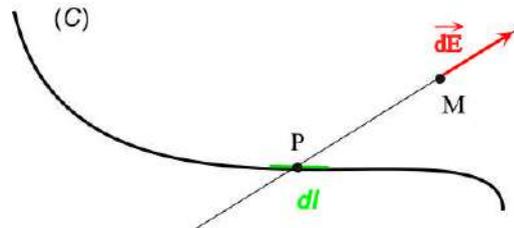


Figure 12. Champ dû à une distribution linéique

Le champ créé en  $M$  par la charge élémentaire contenue dans l'élément de longueur  $dl$ , centré sur  $P$ , est donné par :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dl \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (13)$$

Le champ total est obtenu par intégration de l'expression (13) sur tout le domaine c'est-à-dire la courbe  $(C)$ .

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \lambda dl \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (14)$$

→ Cas où la distribution est surfacique

Les charges sont réparties de façon continue sur une surface quelconque (Figure 13) avec une densité surfacique  $\sigma$ , qui représente la quantité de charge par unité de surface. La quantité de charge élémentaire  $dq$ , contenue dans l'élément de surface  $dS$ , centré sur  $P$ , obéit à :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (15)$$

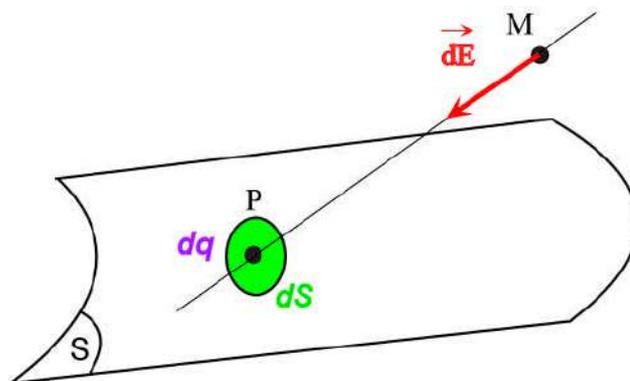


Figure 13. Champ dû à une distribution surfacique

Le champ créé en M par la charge élémentaire contenue dans  $dS$ , centré sur  $P$ , est donné par :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma dS \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (16)$$

Le champ total est obtenu par intégration de l'expression (16) sur tout le domaine c'est-à-dire la surface ( $S$ ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma dS \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (17)$$

→ Cas où la distribution est volumique

Les charges sont réparties de façon continue sur un volume quelconque (Figure 14) avec une densité volumique  $\rho$ , qui représente la quantité de charge par unité de volume. La quantité de charge élémentaire  $dq$ , contenue dans l'élément de volume  $d\tau$ , centré sur  $P$ , obéit à :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad (18)$$

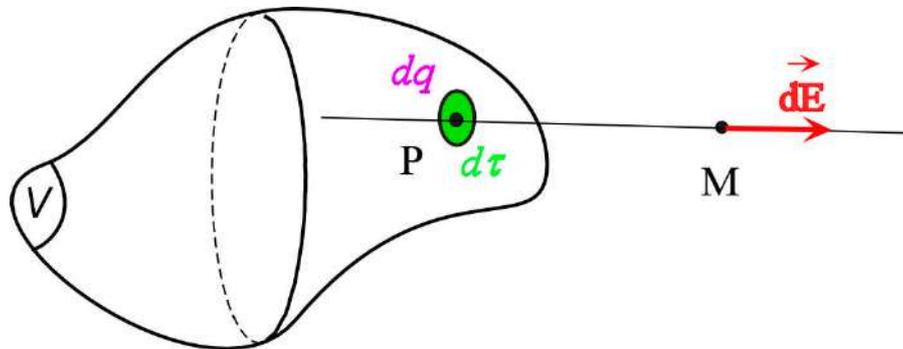


Figure 14. Champ dû à une distribution volumique

Le champ créé en M par la charge élémentaire contenue dans  $d\tau$ , centré sur  $P$ , est donné par :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho d\tau \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (19)$$

Le champ total est obtenu par intégration de l'expression (19) sur tout le domaine c'est-à-dire le volume ( $V$ ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad (20)$$

### 3. Le potentiel électrostatique

#### 3.1. Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle

Calculons la circulation du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en P, le long d'une courbe ( $C$ ) (Figure 15). L'expression du champ est donnée par :

$$\vec{E}_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{PM^2} \quad (21)$$

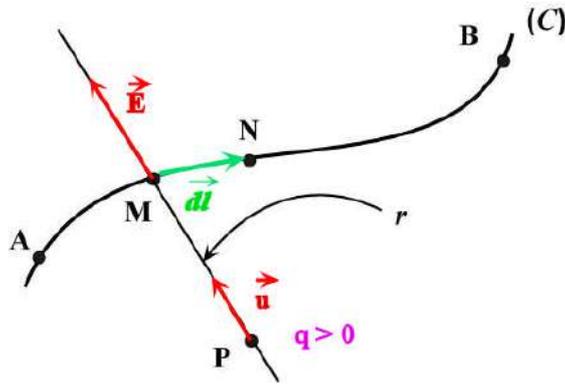


Figure 15. Potentiel électrique créé par une charge ponctuelle.

*En coordonnées sphériques (P étant le centre du système)*

$$\vec{E} \begin{pmatrix} E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ E_\theta = 0 \\ E_\phi = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{dl} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\phi \end{pmatrix}$$

La circulation élémentaire du champ électrostatique  $\vec{E}$  est donnée par :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right) \quad (22)$$

La circulation le long de la courbe AB est alors :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (23)$$

On peut voir clairement que la circulation du champ électrostatique, créé par une charge ponctuelle, le long d'une courbe est **indépendante** du chemin suivi. Il s'ensuit alors :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (24)$$

Et par conséquent (voir la Boîte à outils)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (25)$$

Ce qui veut dire prosaïquement que le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel V. Reprenons l'expression de la circulation élémentaire :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{dl} = -dV = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right) \quad (26)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$V_{M,q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{Cte} \quad (27)$$

**Conditions aux frontières**

Si à l'infini, il n'y a pas de charges, alors  $V_\infty = 0$ . Par conséquent l'équation (27) se réduit à :

$$V_{M,q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (28)$$

Si non, on pose  $V = V_0$  pour  $PM = r_0$ .

### 3.2. Généralisation

$$\begin{aligned} \forall \vec{E} \left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{E}_i \\ \int d\vec{E} \end{array} \right. &= \text{Somme de champs de charges ponctuelles} \\ \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 &\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{E} = -\overline{\text{grad}} V \end{array} \right. \end{aligned} \quad (29)$$

**Travail lorsqu'une charge  $q'$  se déplace de A à B dans un champ  $\vec{E}$  créé par une charge  $q$ .**

La force exercée sur  $q'$  est :

$$\vec{F}_{q'/q} = q' \vec{E}_q \quad (30)$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q' \vec{E} \cdot d\vec{l} = q' \int_{V_A}^{V_B} -dV \quad (31)$$

Soit

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= q'(V_A - V_B) \\ (j) \quad (C) \quad (volt) & \end{aligned} \quad (32)$$

Connaissant l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle on peut aisément le calculer dans des cas plus ou moins compliqués. Les cas de figure sont ceux que nous avons passés en revue lors de l'étude du champ électrostatique (Figures 11, 12, 13 et 14).

#### 3.2.1. Distribution discrète

$$V_M = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + \text{Cte} \quad (33)$$

#### 3.2.2. Distribution continue

→ Distribution linéique

$$V_M = \int_C \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (34)$$

→ Distribution surfacique

$$V_M = \iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (35)$$

→ Distribution volumique

$$V_M = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (36)$$

## 4. Théorème de Gauss

### 4.1. Introduction

■ Flux à travers une sphère de centre O et de rayon R, du champ créé par une charge ponctuelle ( $q > 0$ ) placée en O (Figure 16).

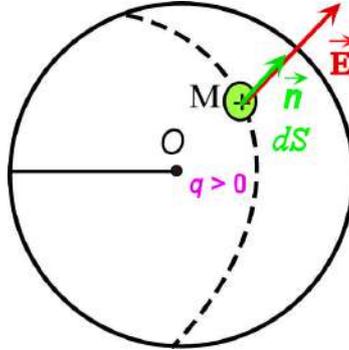


Figure 16. Flux à travers une sphère du champ électrostatique dû à une charge ponctuelle

$$\vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS \quad (37)$$

$$\Phi_{\vec{E}_q/s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \iint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

■ Flux à travers 2 plans parallèles du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle placée au centre du dispositif (Figure 17).

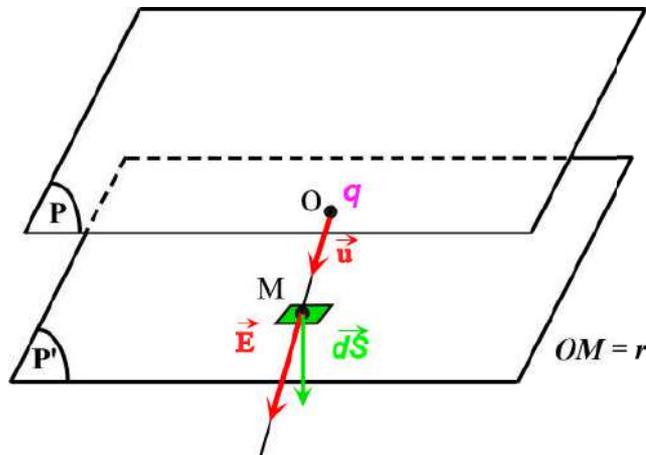


Figure 17. Flux du champ électrostatique à travers deux plans parallèles.

$$d\Phi /_{dS \in P'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega /_{dS \in P'}$$

$$\Phi /_{P'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \quad (38)$$

$$\Phi /_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi$$

$$\Phi_{Total} = \Phi /_P + \Phi /_{P'} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

#### 4.2. Flux du champ créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée

Dans ce cas on examinera 3 configurations :

- Configuration n°1 : Charge située à l'extérieur de la surface (Figure 18)

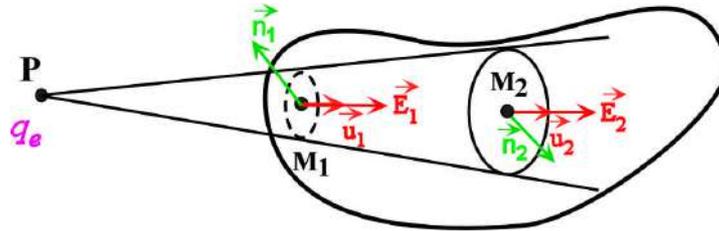


Figure 18. Flux du champ électrique à travers une surface fermée (configuration n°1)

$$d\Phi = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^2} + \frac{\vec{u}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^2} \right] \quad (39)$$

↑ Angle solide

$$\Phi = 0$$

- Configuration n°2 : Charge située à l'intérieur de la surface (Figure 19)

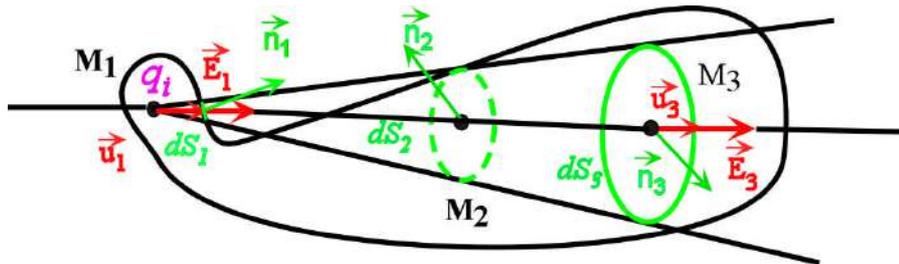


Figure 19. Flux du champ électrique à travers une surface fermée (configuration n°2)

$$d\Phi = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^2} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (40)$$

$$\Phi_{\text{Total}} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

- Configuration n°3 : Charge placée à la surface de la surface fermée (Figure 20)

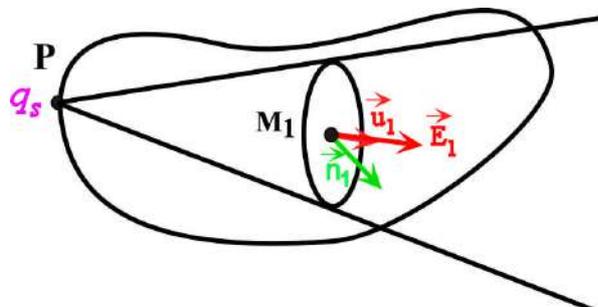


Figure 20. Flux du champ électrique à travers une surface fermée (configuration n°3)

$$d\Phi = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi = \iint_S \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi = \frac{q_s}{2\epsilon_0}$$
(41)

### 4.3. Théorème de Gauss

#### Enoncé :

Le flux du vecteur champ  $\vec{E}$  sortant d'une surface fermée est égal à la somme des charges internes divisée par la permittivité du vide additionnée à la somme des charges de surface divisée par 2 fois la permittivité du vide :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum \frac{q_i}{\epsilon_0} + \sum \frac{q_s}{2\epsilon_0}$$
(42)

#### Remarque :

La surface de Gauss est une surface fictive, choisie délibérément dans le but de faciliter les calculs, particulièrement ceux du champ électrostatique.

#### Exemple

Soit une sphère chargée uniquement en volume (Figure 21) avec une densité  $\rho$ . Calculer le champ électrostatique en tout point  $M$  de l'espace.

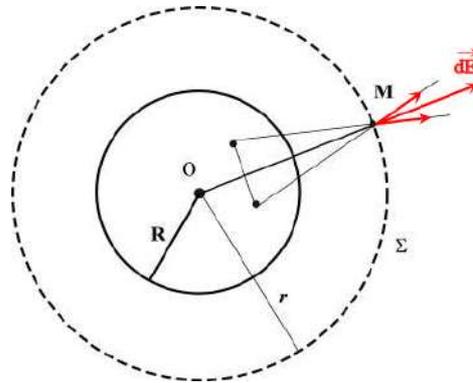


Figure 21. Distribution sphérique et surface de Gauss

La question à laquelle il faut répondre : comment est le champ et de quoi dépend-il ?

Le champ est radial et porté par  $\overline{OM}$ . La surface de Gauss est donc une sphère centrée sur O et de rayon  $r$ . On distinguera deux cas :

$$\rightarrow r > R \quad E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow r < R \quad E \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

On calculera ensuite les limites :  $\lim_{r \rightarrow R^+} E$  et  $\lim_{r \rightarrow R^-} E$

## 5. Topologie du champ électrostatique

### 5.1. Représentation

Nous avons défini le champ et le potentiel électrostatiques par des relations mathématiques. On peut aussi en donner une représentation géométrique par des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.

Les lignes de champ sont tangentes en chacun de leurs points et leur sens est celui de  $\vec{E}$ .

Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

Le sens du champ électrostatique est dirigé vers les potentiels décroissants.

Le champ électrostatique est discontinu tandis que le potentiel est toujours continu.

### 5.2. Règles de topologie

→ Deux lignes de champ ou deux surfaces équipotentielles ne se recoupent pas.

→ Une ligne de champ ne peut être fermée alors qu'une surface peut l'être.

→ La ligne de champ diverge à partir d'une charge positive et converge à partir d'une charge négative.

→ Le potentiel ne peut être maximum (ou minimum) qu'en un point où il y a une charge positive (ou négative) (Figure 22).

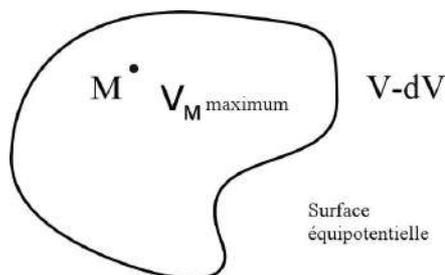


Figure 22. Extrémum du potentiel (cas du maximum)

$$\Phi \vec{E} /_s = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (43)$$

*Cas du maximum*

$\vec{dS}$  est orienté vers l'extérieur,  $\vec{E}$  est de même sens que  $\vec{dS}$ , par conséquent  $\Phi > 0$  et par suite  $q > 0$ . On peut faire la même chose pour le minimum (Exercice à faire).

Pas de charge, pas d'extrémum pour  $V$ .

→ Dans une région dépourvue de charges le flux de  $\vec{E}$  est le même à travers toutes les sections d'un tube de champ (Figure 23).

$$\Phi \vec{E} /_{s_1+s_2+s_L} = \frac{0}{\epsilon_0} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Phi \vec{E} /_{s_1+s_2+s_L} &= \iint_{s_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{s_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{dS}_2 + \iint_{s_L} \vec{E}_L \cdot \vec{dS}_L \\ &= -\Phi /_{s_1} + \Phi /_{s_2} + 0 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\Phi /_{s_1} = \Phi /_{s_2} \quad (46)$$

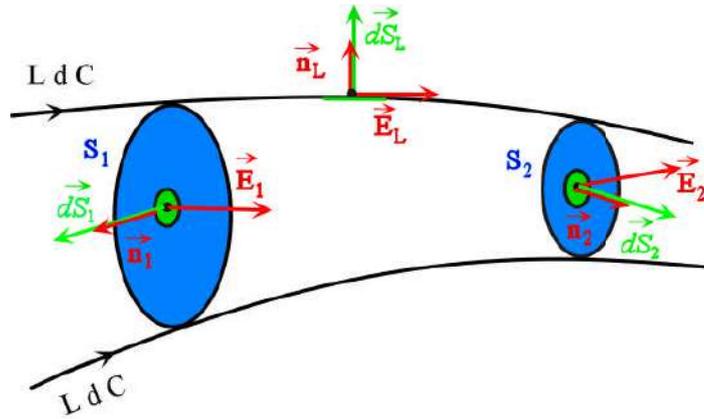


Figure 23. Flux constant à travers les sections d'un tube de flux

## 6. Problème relatif aux conditions de passage

On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'interface séparant deux milieux avec des densités volumiques de charge  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . L'interface est sujette à une distribution surfacique de charge de densité  $\sigma$  (Figure 24).

Pour cela, on considère deux points voisins  $M_1$  et  $M_2$  de part et d'autre de l'interface et on cherchera à connaître la valeur du champ électrostatique en ces deux points.

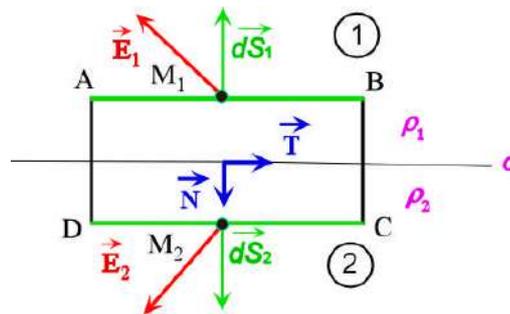


Figure 24. Conditions de passage du champ électrostatique.

→ Calculons la circulation de  $\vec{E}$  le long de la ligne fermée ABCD :

$$C\vec{E}/_{ABCD} = \vec{E}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{E}_2 \cdot \vec{CD} = 0 \quad (47)$$

Soit :

$$E_{1T} \cdot AB - E_{2T} \cdot CD = 0 \quad (48)$$

Les circulations élémentaires  $\vec{E} \cdot \vec{BC}$  et  $\vec{E} \cdot \vec{DA}$  étant négligeables devant les circulations  $\vec{E}_1 \cdot \vec{BC}$  et  $\vec{E}_2 \cdot \vec{DA}$  car les côtés BC et DA sont des infiniment petits d'ordre 2 donc négligés devant les côtés AB et CD, infiniment petits d'ordre 1. De (48) il s'ensuit :

$$E_{1T} = E_{2T} \quad (49)$$

On conclut donc, que la composante tangentielle du champ électrostatique est continue au travers de l'interface.

→ Appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée englobant l'interface. Il s'agit d'un parallélépipède rectangle. Là aussi on négligera les surfaces latérales devant les  $dS_1$  et  $dS_2$  pour le même motif que pour le calcul de la circulation (voir plus haut). L'application du théorème de Gauss donnera donc :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{dS}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{dS}_2 = \frac{\sigma dS_1}{\epsilon_0} \quad (50)$$

Soit :

$$-E_{1N} \cdot dS_1 + E_{2N} \cdot dS_1 = \frac{\sigma dS_1}{\epsilon_0} \quad (51)$$

De (51) on tire :

$$E_{2N} - E_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (52)$$

La composante normale du champ électrostatique présente donc, un saut égal à  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

## 7. Le vecteur induction électrostatique

### 7.1. Définition

$$\iint_{S \text{ fermée}} \vec{D} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V \text{ entouré par } S} \rho d\tau = Q_{\text{int à } S} \quad (53)$$

### 7.2. Relation avec $\vec{E}$

On sait que :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (54)$$

## 8. Les équations de locales de l'électrostatique

### 8.1. Equation locale du champ

Soit V le potentiel dont dérive  $\vec{E}$ . Nous avons :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \\ \oint_{C, \text{ fermé}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \text{ (circulation conservative)} \end{cases} \quad (55)$$

Appliquons le théorème de Stokes : on choisit un contour fermé et une surface s'appuyant sur celui-ci (Figure 25), nous obtenons :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (56)$$

D'où l'équation locale du champ électrostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad (57)$$

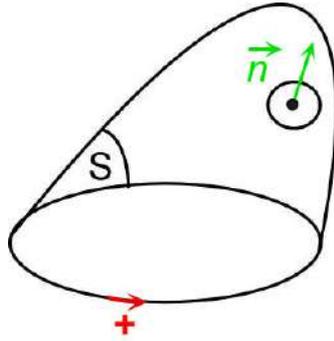


Figure 25. Application du théorème de Stokes.

## 8.2. Equation locale de l'induction électrostatique

Par définition de  $\vec{D}$  :

$$\iint_{S, \text{ fermée}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V, \text{ int } \dot{a} S} \rho \cdot d\tau \quad (58)$$

Ensuite en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iint_{S, \text{ fermée}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V, \text{ int } \dot{a} S} \text{div} \vec{D} \cdot d\tau \quad (59)$$

On obtient en combinant les équations (58) et (59) :  $\text{div} \vec{D} = \rho$ . Or dans le vide :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ , d'où une autre équation du champ électrostatique :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (60)$$

## 8.3. Equation de Laplace-Poisson

Un champ de vecteurs n'est pas nécessairement un champ électrostatique. Pour construire un champ électrostatique on se doit d'avoir un potentiel  $V$ . Le champ électrostatique est alors lié au potentiel par :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$  et on cherchera les sources de ce champ par  $\rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$ .

$$\rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = -\epsilon_0 \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = -\epsilon_0 \Delta V \quad (61)$$

Soit:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (62)$$

D'où l'équation locale du potentiel, l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (63)$$

Si  $\rho = 0$ , on obtient alors l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \quad (64)$$

## 9. Les conducteurs électriques

### 9.1. Introduction

On distingue deux comportements différents de la matière vis-à-vis des charges électriques. Si les charges restent là où elles sont créées on parle d'isolants ou de diélectriques. Si, par contre, les charges se déplacent après avoir été créées, on parle alors de conducteurs.

#### **Exemple :**

Un métal : le cuivre, Cu. Un atome isolé de Cu est formé de Z protons et Z électrons liés à l'atome. La structure élémentaire du cuivre se présente sous forme d'un cube, aux sommets duquel on note la présence d'ions Cu<sup>+</sup> et des électrons baignant dedans et capables de se mouvoir, mais l'ensemble reste électriquement neutre.

Un conducteur est un milieu dans lequel il y a des charges libres de se déplacer. Ce sera des électrons dans le cas des métaux ou des ions dans le cas des électrolytes.

Un conducteur peut être chargé, soit en y apportant des charges, soit en en y enlevant.

### 9.2. Conducteur en équilibre électrostatique

On dit qu'un conducteur est en **équilibre électrostatique** lorsque les charges créées sont au "repos macroscopique". Il n'y a pas alors de mouvement d'ensemble.

#### 9.2.1. Champ et potentiel

→ A l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique, le champ électrostatique est nul car il n'y a pas possibilité de mouvement des charges :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad (65)$$

→ De l'équation (65) on en déduit que le potentiel est constant dans le conducteur et à sa surface (le potentiel est continu).

→ Une autre conséquence de l'équation (65) est l'absence de charge à l'intérieur du conducteur. En effet :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{int}} = 0 \quad (66)$$

Les charges sont alors disposées sur la surface du conducteur.

#### 9.2.2. Champ au voisinage d'un conducteur en équilibre électrostatique

Soit (C) un conducteur en équilibre électrostatique (Figure 26)

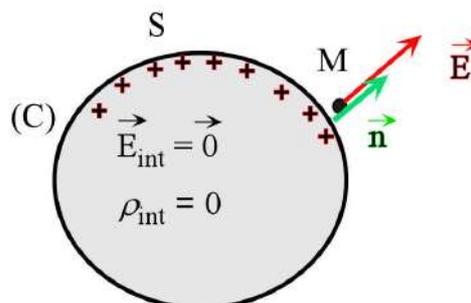


Figure 26. Conducteur en équilibre électrostatique.

S est une équipotentielle, donc le champ au voisinage de S est normale à celle-ci. En plus, et en vertu de (52), nous avons (discontinuité de la composante normale de  $\vec{E}$ ):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (67)$$

### 9.3. Le courant électrique

#### 9.3.1. Rupture d'équilibre électrostatique

Soient ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) deux conducteurs initialement en équilibre électrostatique (Figure 27).

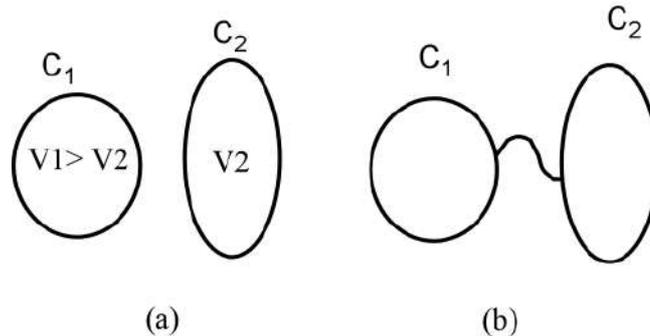


Figure 27. Conducteurs (état d'équilibre (a), rupture d'équilibre (b)).

Les conducteurs ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) ne sont pas liés (Figure 27(a)), il n'y a pas de mouvement d'ensemble des porteurs de charges  $\vec{V} = \langle \vec{V}_i \rangle = \vec{0}$ .

En reliant les deux conducteurs par un fil (Figure 27 (b)), on en fait un seul conducteur ayant un potentiel  $V_1 < V < V_2$ . Les charges des deux conducteurs ont varié. Des charges se sont donc déplacées sous l'effet d'un champ électrostatique dirigé de ( $C_1$ ) vers ( $C_2$ ). Il y a donc un mouvement de porteurs de charges  $\vec{V} = \langle \vec{V}_i \rangle \neq \vec{0}$ . Il y a création d'un **courant électrique** durant le laps de temps avant l'établissement d'un autre état d'équilibre.

#### 9.3.2. Principe de la conservation de la charge

Soit un volume ( $V$ ) limité par une surface ( $S$ ) d'un conducteur parcouru par un courant électrique (Figure 28). On peut connaître la charge qui le quitte par unité de temps.

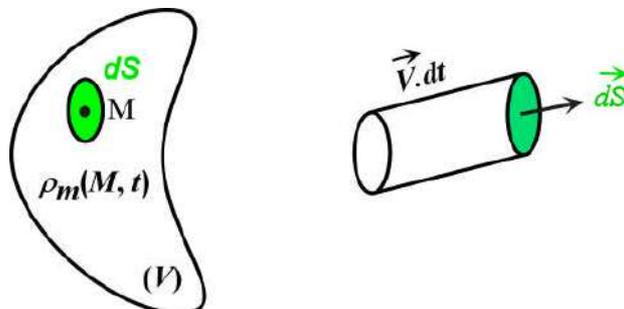


Figure 28. Charges mobiles d'un conducteur

Soit  $\rho_m(M, t)$  la densité des charges mobiles.

Au point M la quantité de charges contenue dans le cylindre élémentaire à l'instant  $t$  est  $\rho_m(M, t) \cdot \vec{V} \cdot \vec{dS} \cdot dt$ . C'est aussi la quantité de charges ayant traversé la surface élémentaire  $\vec{dS}$ . La quantité ayant traversé toute la surface S par unité de temps est donc :

$$A = \iint_S \rho_m(M, t) \vec{V} \cdot \vec{dS} \quad (68)$$

D'un autre côté, la quantité de charge contenue dans le volume V est  $\iiint_V \rho_m(M, t) \cdot d\tau$  et sa variation par unité de temps est donnée par :

$$B = \iiint_V \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} \cdot d\tau \quad (69)$$

En l'absence de sources ou de pertes de charges la quantité A est égale à l'opposé de B. Ceci traduit le **principe de la conservation de la charge**. On a alors :

$$\iint_S \rho_m(M, t) \vec{V} \cdot \vec{dS} = - \iiint_V \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} \cdot d\tau \quad (70)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky au terme de gauche de l'équation (70) donne :

$$\iint_S \rho_m(M, t) \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div}(\rho_m(M, t) \cdot \vec{V}) \cdot d\tau \quad (71)$$

En combinant les équations (70) et (71), on obtient :

$$\iiint_V \text{div}(\rho_m(M, t) \cdot \vec{V}) \cdot d\tau = - \iiint_V \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} \cdot d\tau \quad (72)$$

D'où l'équation ponctuelle suivante :

$$\text{div}(\rho_m(M, t) \cdot \vec{V}) + \frac{\partial \rho_m(M, t)}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

Cette équation exprimant le principe de la conservation des charges porte le nom de **l'équation de continuité**. On établira une équation similaire lors de l'étude de la mécanique de fluides.

En régime permanent ou stationnaire :  $\rho_m(M, t) = \rho_m$  l'équation (73) se réduit à :

$$\text{div}(\rho_m \cdot \vec{V}) = 0 \quad (74)$$

### 9.3.3. Le vecteur densité de courant

Dans le paragraphe précédent nous avons calculé la quantité de charge ayant traversé l'élément de surface  $\vec{dS}$  (Figure 28). La quantité de charge ayant traversé cette surface élémentaire par unité de temps est donc :

$$\frac{dQ}{dt} = \rho_m(M, t) \cdot \vec{V} \cdot \vec{dS} \quad (75)$$

Le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{j} = \rho_m \cdot \vec{V} \quad (76)$$

On voit bien que la quantité de charge par unité de temps ayant traversé la surface élémentaire  $\overline{dS}$  représente le flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers la surface élémentaire  $\overline{dS}$ .

On appelle intensité  $I$  du courant à travers une section ( $S$ ) d'un conducteur, le flux de  $\vec{j}$  à travers cette section.

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \overline{dS} \quad (77)$$

L'unité du vecteur densité de courant est (A/m<sup>2</sup>)

**Propriétés du vecteur densité de courant en régime permanent** ( $\text{div } \vec{j} = 0$ )

- Les lignes de courant sont des lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur  $\vec{j}$ .
- L'intensité du courant est la même à travers toutes les sections d'un tube de courant.
- La composante normale du vecteur densité de courant est continue : à l'interface de deux milieux conducteurs nous avons :  $j_{1,n} = j_{2,n}$ .
- Si un des milieux est isolant  $j_{1,n} = j_{2,n} \Rightarrow \vec{j}$  est tangent à la surface de séparation.

#### 9.3.4. Loi d'Ohm et ses conséquences

Un conducteur parcouru par un courant électrique suppose l'existence d'un champ électrique  $\vec{E}$  à l'intérieur de celui-ci responsable du déplacement des charges. La vitesse de **déplacement des particules chargées est liée au champ électrique par la relation :**

$$\vec{V} = K \cdot \vec{E} \quad (78)$$

$K$  traduit la mobilité et est indépendante du champ électrique  $\vec{E}$ , surtout pour les conducteurs métalliques. Les conducteurs vérifiant l'équation (73) sont dits conducteurs **ohmiques**.

De (78) on tire :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{V} = \rho_m K \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad (79)$$

$\gamma = K \rho_m$  est la conductivité du matériau et s'exprime en siemens par mètre (S.m<sup>-1</sup>). Son inverse  $\frac{1}{\gamma}$  est la résistivité ( $\Omega^{-1}$ ).

La loi d'Ohm locale est exprimée par :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (80)$$

Cette loi permet donc de relier la cause du courant électrique  $\vec{E}$  à son effet  $\vec{j}$ .

#### 9.3.5. Conséquences de la loi d'Ohm

**Conséquences immédiates**

Soit (C) un conducteur homogène, isotrope, ohmique et parcouru par un courant stationnaire

- $\text{div } \vec{j} = 0$
- $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$

→  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho_V = 0$  ( $\rho_V$  est la densité volumique de toutes les charges). Les charges sont donc superficielles

→ Les lignes de courant sont aussi des lignes de champ

→ Dans le cas d'un conducteur entouré d'un isolant,  $\vec{j}$  est nécessairement tangent à la surface du conducteur, donc  $\vec{E}$  est tangent à la surface du conducteur, par conséquent la surface du conducteur n'est pas une équipotentielle (contrairement aux conducteurs en équilibre électrostatique)

### Résistance d'un conducteur ohmique

Soit le conducteur ci-dessous (Figure 29)

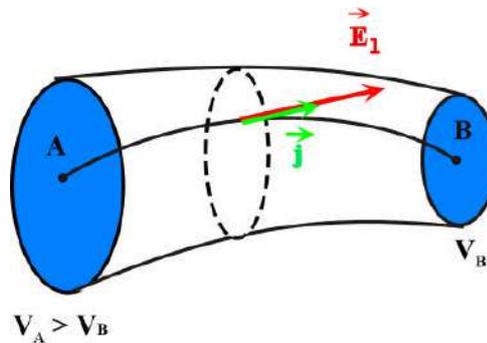


Figure 29. Conducteur ohmique

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (81)$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \gamma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (82)$$

En divisant (81) par (82), on trouve la formule de la résistance exprimée en Ohm

$$\frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\gamma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} = R \text{ (}\Omega\text{)} \quad (83)$$

### Résistance d'un conducteur ohmique cylindrique

Soit un conducteur cylindrique homogène et isotrope (Figure 30) :

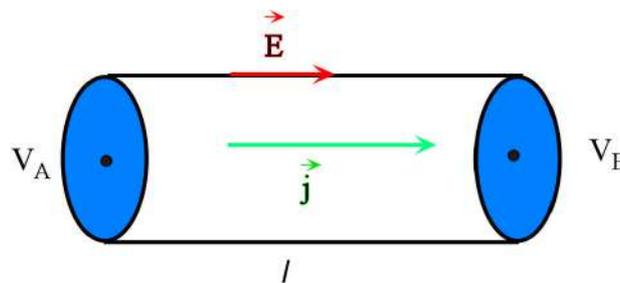


Figure 30. Conducteur cylindrique

$$V_A > V_B$$

$\vec{E}$  et  $\vec{j}$  sont uniformes, alors ::

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{E.l}{E.S} = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} \quad (84)$$

## 10. Application aux sciences de la terre : la prospection électrique

### 10.1. Introduction

Les méthodes de prospection électrique utilisent le passage d'un courant électrique naturel ou artificiel pour l'évaluation des résistivités du sous-sol dans le but de distinguer les formations conductrices de celles résistantes.

Plusieurs méthodes électriques sont utilisées :

→ La méthode des résistivités : cette méthode utilise un courant provoqué par l'envoi dans le sol grâce à des électrodes, d'un courant continu ou alternatif et de la mesure ensuite d'une différence de potentiel au niveau de deux autres électrodes. La résistivité est alors calculée en fonction de l'intensité du courant injecté et la **ddp** mesurée. Cette méthode est la plus utilisée en géologie régionale, en hydrogéologie et en génie civil. La théorie de la répartition des courants dans le sous-sol, base de la méthode des résistivités a été mise au point à la fin de la première guerre mondiale par les physiciens Wenner, Tagg et surtout Schlumberger.

→ La méthode de la polarisation spontanée consiste en l'étude des potentiels électriques naturels créés par des gisements massifs.

→ La méthode de la mise à la masse dont le but est l'étude des potentiels électriques provoqués par un courant continu que l'on injecte en un point d'un gisement massif.

→ La méthode de la polarisation provoquée consiste en l'étude de la décharge des terrains chargés artificiellement grâce à l'envoi d'un courant dans le sol.

→ La méthode tellurique s'intéresse aux potentiels engendrés par des courants naturels sans rapport avec les causes à l'origine de la polarisation spontanée.

Dans la suite de ce cours on s'intéressera uniquement à la **méthode des résistivités**. Plus de détails concernant les autres méthodes seront donnés en troisième année de licence.

### 10.2. Conductibilité des roches

Les roches formant le sous-sol (sables, argiles, calcaires, granites, ...etc.) possèdent le plus souvent une conductibilité électrolytique, grâce aux solutions salines toujours présentes en plus ou moins grandes quantités dans les pores et les fissures, tandis que les métaux possèdent une conductibilité électronique.

La conductibilité électrolytique (déplacement d'ions) obéit à la loi d'Ohm et permet donc de définir une conductivité (ou une résistivité) qui caractérise les différents roches formant le sous-sol.

Quelques matériaux du sous-sol, tels certains minéraux (pyrite, sulfures de cuivre) ou le graphite ont une conductibilité électronique.

Dans la plupart des cas, les roches sont de mauvais conducteurs. Les argiles qui sont relativement conductrices sont mille fois moins conductrices que la pyrite massive et cent million de fois moins conductrices que les métaux usuels.

On distingue 3 grandes classes de conducteurs : les bons conducteurs, les conducteurs moyens et les faibles conducteurs. La conductibilité des roches dépend de plusieurs facteurs :

- La porosité  $p = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}}$
- La teneur en eau  $w = \frac{\text{Volume d'eau}}{\text{Volume total}}$
- La salinité de l'eau contenue dans les pores de la roche

### Relation entre porosité et résistivité

$$\rho_r = F \cdot \rho_w$$

$\rho_r$  et  $\rho_w$  sont respectivement la résistivité de la roche et celle de l'eau interstitielle alors que  $F$  est le facteur de formation de la roche sans argile pouvant être lié à la porosité par  $F = \frac{a}{p^m}$  ( $a$  est un coefficient dépendant de la lithologie  $0.6 \leq a \leq 2$  et  $m$  représente le facteur de cimentation ou de tortuosité dépendant du type de sédiment et de la forme des pores, ...etc.)

En conclusion, c'est l'eau incluse dans les matériaux et la quantité de sels dissous dans cette eau qui par conductibilité électrolytique rendent les roches plus ou moins conductrices. Par exemple un même calcaire sec, fissuré et rempli d'eau douce, ou fissuré et rempli d'eau de mer, pourra posséder respectivement une résistivité de plusieurs milliers d' $\Omega.m$ , de plusieurs centaines d' $\Omega.m$  ou de quelques dizaines d' $\Omega.m$ .

### Valeurs usuelles de la résistivité des roches

Roches	Résistivité ( $\Omega.m$ )
Graviers, cailloux secs, sables de dune	10000 et +
Roches éruptives non altérées	300-2000
Calcaires francs, grès calcaires, quartzites	300-1500
Schistes non graphiteux	50-500
Calcaires marneux, craie	80-300
Grès marneux ou argileux	15-120
Marnes	0.5-60
Argiles, Vases	0.5-30
Eau de rivière	20-60
Eau de mer	0.18-0.24

### 10.3. Potentiel dans un milieu homogène

Le milieu dont il est question est le sous-sol. On s'intéressera donc à son comportement vis-à-vis du courant électrique, comme n'importe quel autre matériau. Nous savons déjà l'excellente qualité des métaux à conduire le courant électrique, qu'en est-il du sous-sol et des différentes formations qui le constituent ?

La réponse à ces questionnements nous permettra au final de distinguer les formations conductrices de celles qui ne le sont pas, et par conséquent apportera des éclairages au prospecteur dans sa recherche des substances utiles (minéralisation, eau, ...etc.) L'approche sera basée sur les concepts que nous avons déjà décrits : Potentiel, champ électrique, densité de courant, conductivité, résistivité... etc.

La combinaison des équations (74), (76) et (80) en supposant constante la conductivité du matériau et le fait que le champ électrique dérive d'un potentiel, donne :

$$\Delta V = 0 \quad (85)$$

**Les conditions aux limites :**

- Le potentiel est continu
- La composante normale du vecteur densité de courant est continue.

### 10.3.1. Electrode unique en profondeur

Soit une électrode de petites dimensions enterrée dans un milieu homogène et isotrope (Figure 31). Le courant se referme sur une autre électrode assez éloignée pour que son influence soit négligée.

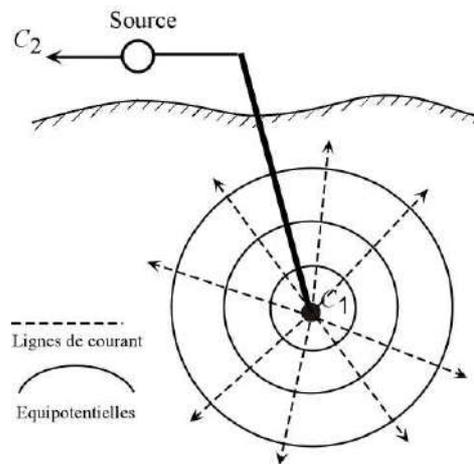


Figure 31. Electrode enterrée dans un milieu homogène

Soit  $r$  la distance à l'électrode  $C_1$ , le potentiel sera fonction de  $r$  seulement pour raison de symétrie sphérique. Dans ce cas, le Laplacien s'exprimera uniquement en fonction de  $r$ .

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad (86)$$

Soit

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2} \quad (87)$$

Et donc :

$$V = -\frac{A}{r} + B \quad (88)$$

$A$  et  $B$  sont des constantes déterminées en fonction des conditions aux limites :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (89)$$

On sait aussi que le flux du vecteur densité à travers une section du conducteur est égale à l'intensité du courant :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (90)$$

$S$  représente la surface d'une équipotentielle (sphère dans ce cas) de rayon  $r$  et  $\vec{j}$  est radial.

De (90) on tire :

$$I = 4\pi r^2 j \quad (91)$$

Or

$$j = \gamma E = -\gamma \frac{dV}{dr} \quad (92)$$

De (91) et (92) et (88), en remarquant au passage que  $B = 0$ , on tire :

$$I = -4\pi\gamma A \quad (93)$$

Soit

$$A = -\frac{1}{\gamma} \frac{I}{4\pi} = -\frac{I\rho}{4\pi} \quad (94)$$

La résistivité  $\rho$  étant l'inverse de la conductivité  $\gamma$

Finalement le potentiel en un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'électrode  $C_1$  s'écrira :

$$V = \left( \frac{I\rho}{4\pi} \right) \frac{1}{r} \quad (95)$$

La résistivité est donnée par :

$$\rho = 4\pi r \frac{V}{I} \quad (96)$$

### 10.3.2. Electrode unique en surface

L'électrode de petites dimensions est placée à la surface d'un milieu homogène et isotrope (Figure 32). Le courant se referme sur une autre électrode assez éloignée pour que son influence soit négligée.

Là aussi le potentiel ne dépend que de  $r$ . les équipotentielles sont des demie-sphères centrées en  $C_1$ . La solution générale du potentiel est donnée par (88).

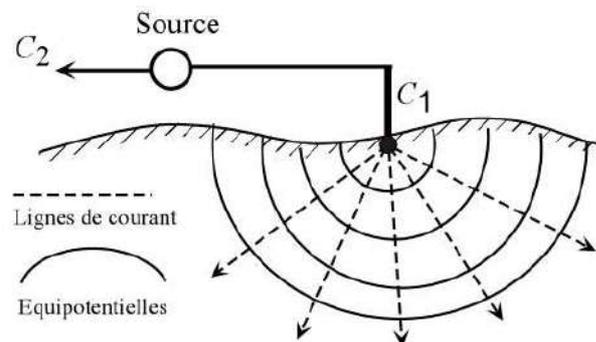


Figure 32. Electrode placée à la surface d'un milieu homogène

Les conditions aux limites dans ce cas de figure :

■ Comme pour le cas précédent, le potentiel est nul à l'infini, nous en déduisons donc  $B = 0$ .

■ La composante normale du vecteur densité de courant est continue à l'interface milieu-air. Or l'air possède une conductivité nulle, il s'ensuit donc que la composante verticale du champ électrique est nulle, soit :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{A}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{Az}{r^3} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (97)$$

Sachant  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Même raisonnement que précédemment, le flux du vecteur densité de courant à travers la section de rayon  $r$  :

$$I = 2\pi r^2 j \quad (98)$$

Combinant les équations (92) et (98), on trouve :

$$I = -2\pi\gamma A \quad (99)$$

$$A = -\frac{I\rho}{2\pi} \quad (100)$$

Soit, l'expression du potentiel  $V$  :

$$V = \left( \frac{I\rho}{2\pi} \right) \frac{1}{r} \quad (101)$$

L'expression de la résistivité :

$$\rho = 2\pi r \frac{V}{I} \quad (102)$$

### 10.3.3. Deux électrodes en surface

Lorsque la distance entre les deux électrodes est finie (Figure 33), le potentiel en tout point de la surface dépendra donc des deux électrodes. Si le sol est homogène et isotrope, on aura :

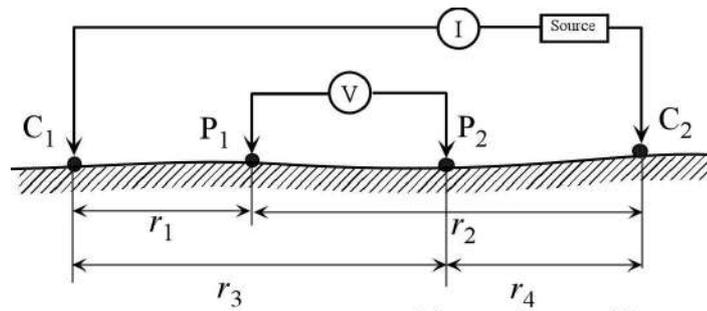


Figure 33. Deux électrodes de courant à la surface du sol.

• Le potentiel en  $P_1$  dû à  $C_1$

$$V_1 = -\frac{A_1}{r_1} \quad \text{où } A_1 = -\frac{I\rho}{2\pi} \quad (103)$$

• Le potentiel en  $P_1$  dû à  $C_2$

$$V_2 = -\frac{A_2}{r_2} \quad \text{où } A_2 = \frac{I\rho}{2\pi} = -A_1 \quad (104)$$

Ceci à cause de la configuration des lignes de courant, sortant d'une électrode et rentrant vers l'autre. Le potentiel en  $P_1$  dû aux deux électrodes est :

$$V_1 + V_2 = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (105)$$

En un autre point  $P_2$ , le potentiel s'exprimera de la même façon qu'en  $P_1$ , mais en utilisant les distances  $r_3$  et  $r_4$ . La différence de potentiel entre  $P_1$  et  $P_2$  est donnée par :

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right\} \quad (106)$$

L'arrangement des électrodes de courant et de potentiel illustré par la Figure 33 correspond au dispositif quadripôle utilisé en résistivité sur le terrain.

A cause de la proximité des électrodes  $C_1$  et  $C_2$ , les surface équipotentiels se trouvent déformées. Ces équipotentiels (Figure 34) répondent aux équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \text{constante} \\ R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\theta = 4L^2 \end{cases} \quad (107)$$

$R_1$  et  $R_2$  sont les distances du point aux deux électrodes de courant et  $2L$  la distance les séparant

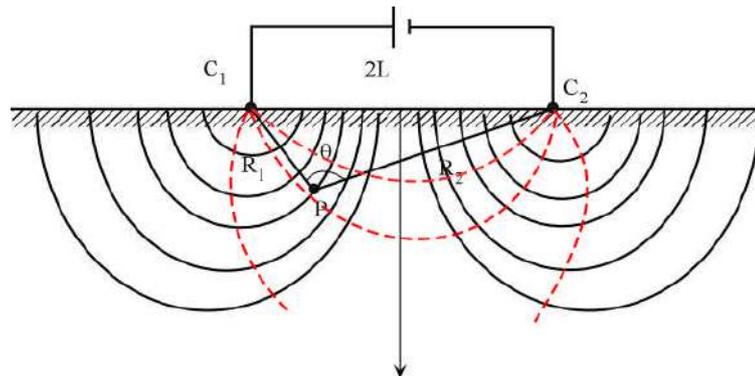


Figure 34. Distorsion des lignes de courant et des équipotentiels

### 9.3.4. Distribution du courant

Soient deux électrodes ponctuelles placées à la surface d'un sol homogène (Figure 35) et l'on s'intéresse à la propagation du courant dans le sous-sol, notamment de savoir le volume souterrain intéressé par le courant électrique et dans quelles proportions, c'est-à-dire rendre compte de la densité de courant dans le sous-sol.

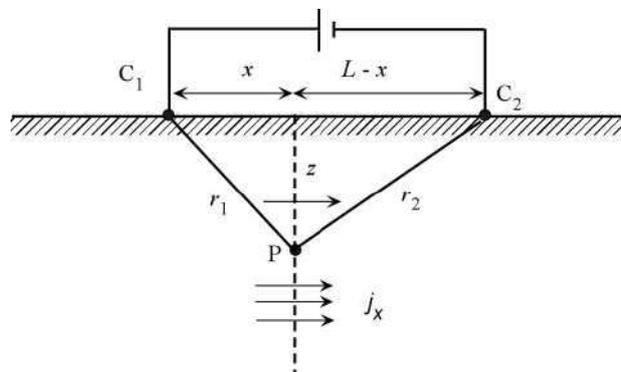


Figure 35. Densité du courant dans le sous-sol

→ Composante horizontale du vecteur densité de courant.

$$j_x = \gamma E_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{I \rho}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (108)$$

$$j_x = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{x}{r_1^3} - \frac{x-L}{r_2^3} \right) \quad (109)$$

Si le point P est situé sur la médiatrice du segment  $[C_1, C_2]$ , nous aurons  $r_1 = r_2 = r$  et :

$$j_x = \frac{I}{2\pi} \frac{L}{\left( z^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (110)$$

De l'équation (110) on peut voir que la profondeur intéressée par les lignes de courant dépend de l'écartement des électrodes. La Figure 36 donne une idée sur la zone d'influence des lignes de courant dans le sous-sol. La courbe en fait, représente les variations de la fonction

$$\frac{j_x}{j_{x,0}} = f\left(\frac{z}{L}\right).$$

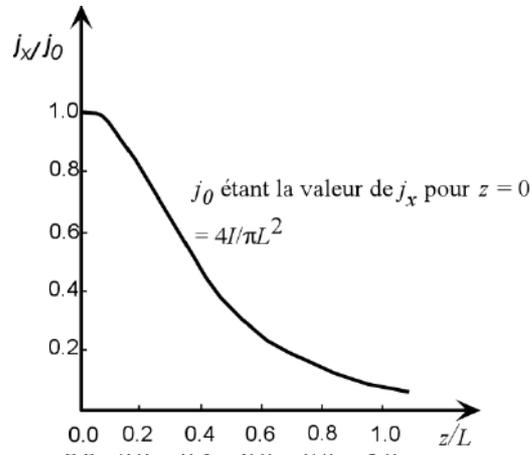


Figure 36. Densité de courant en fonction de la profondeur

→ Fraction de courant à travers une section du plan médiateur du segment  $[C_1, C_2]$ .

La fraction élémentaire du courant à travers la surface élémentaire  $dydz$  est :

$$\delta I_x = j_x dydz = \frac{I}{2\pi} \frac{L}{\left[ \left( \frac{L}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dydz \quad (111)$$

La fraction à travers la surface contenue entre  $z_1$  et  $z_2$  et sur toute l'étendue de l'axe des y est :

$$I_x = \frac{IL}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left[ \left( \frac{L}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2I}{\pi} \left( \arctg \frac{2z_2}{L} - \arctg \frac{2z_1}{L} \right) \quad (112)$$

Cette fraction présente un maximum si  $L = 2\sqrt{z_1 z_2}$ .

### Exemple

Si  $z_1 = 100$  m et  $z_2 = 200$  m l'écartement des électrodes doit être de 283 m.

Pour une section semi-infinie la fraction de courant sera :

$$\lim_{z_2 \rightarrow \infty} I_x = I \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2z_1}{L} \right) \quad (113)$$

La Figure 37 illustre l'écartement des électrodes requis pour qu'une fraction importante du courant soit obligée de passer au dessous de la profondeur  $z_1$ .

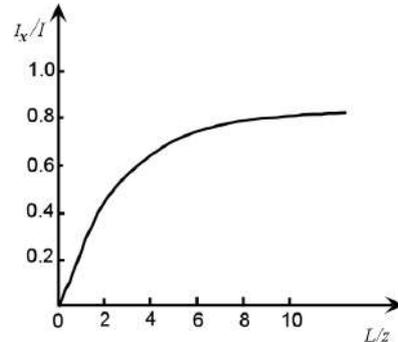


Figure 37. Fraction de courant se propageant en dessous de  $z_1$  pour un écartement  $L$

## 9.4. Effet des hétérogénéités dans le sol

### 9.4.1. Introduction

Dans la section précédente nous nous sommes contentés uniquement d'étudier la distribution du potentiel et du courant dans le cas d'un sol homogène. Or la raison d'être de la méthode de la prospection électrique est de pouvoir s'attaquer aux anomalies électriques et de pouvoir différencier des corps conducteurs des corps résistants. Le calcul du potentiel ne présentait pas une grande difficulté dans le cas d'un sol homogène, mais qu'en est-il lorsque le sol ne l'est plus ? Que sera l'expression du potentiel dans le cas de deux ou plusieurs couches horizontales, ou dans le cas d'un changement latéral de faciès, ou encore dans le cas d'une masse contrastant nettement avec son encaissant ?

### 9.4.2. Déformation des lignes de champ à l'interface de deux milieux différents

Soient deux milieux homogènes de résistivité  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , séparés par une interface plane et, sièges d'un courant électrique (Figure 37). On va appliquer à cette configuration les conditions de passage, que nous avons établies précédemment en ce qui concerne le champ électrique et le vecteur de densité du courant.

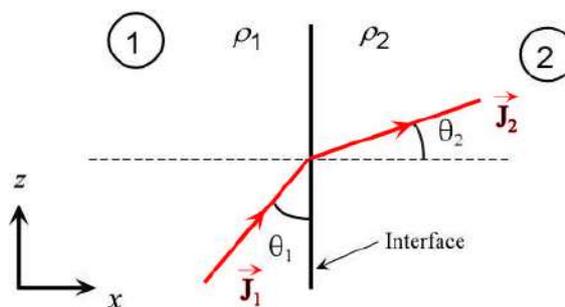


Figure 37. Déviation du vecteur densité de courant sur une interface plane

Les conditions de passage sont :

- Continuité de la composante tangentielle du champ électrique.
- Continuité de la composante normale du vecteur densité de courant.

Ce que l'on traduit respectivement par :

$$E_{1z} = E_{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{J_{1z}}{\gamma_1} = \frac{J_{2z}}{\gamma_2} \quad (114)$$

Soit :

$$\rho_1 J_{1z} = \rho_2 J_{2z} \quad (115)$$

Et ensuite

$$J_{1x} = J_{2x} \quad (116)$$

En divisant (115) par (116) on obtient :

$$\rho_1 \frac{J_{1z}}{J_{1x}} = \rho_2 \frac{J_{2z}}{J_{2x}} \quad (117)$$

Soit :

$$\rho_1 \tan \theta_1 = \rho_2 \tan \theta_2 \quad (118)$$

Ou encore :

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (119)$$

On voit bien que les lignes de courant sont déviées quand elles passent d'un milieu à un autre.

#### 9.4.3. Déformation des équipotentiels à l'interface de deux milieux différents

On vient de voir que les lignes de courant sont déviées à l'interface de deux milieux de résistivités différentes, on doit donc s'attendre au même phénomène dans le cas des équipotentiels. Pour une configuration similaire (Figure 37) on peut mathématiquement déterminer le potentiel en tout point de l'espace connaissant l'équation aux dérivées partielles (EDP) régissant le potentiel (équation (85) plus haut) et les conditions aux limites du domaine. Ceci peut s'avérer fastidieux, c'est pourquoi on utilisera une méthode plus simple inspirée de la théorie des images utilisée en optique (théorie valable dans le cas des interfaces planes, notamment).

En optique on se propose de déterminer l'intensité lumineuse en un point due à une source lumineuse émettrice placée dans un milieu séparé d'un autre par un miroir semi-transparent ayant un coefficient de réflexion  $k$  et de transmission  $1 - k$  (Figure 38 a et b).

L'intensité de la lumière en un point du premier milieu est due en partie à la source de lumière elle-même et en partie à la lumière réfléchi sur le miroir (ou à la lumière émanant de l'image mais avec un coefficient de réduction de l'intensité égal à  $k$ ). En ce qui concerne un point situé dans le second milieu l'intensité est uniquement due à la source de lumière mais avec un coefficient de réduction de l'intensité égale à  $1 - k$ .

Par analogie si l'on remplace la source de lumière par une source ponctuelle de courant et l'intensité lumineuse par le potentiel, celui-ci sera donné au point P (Figure 38b) par :

$$V = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{k}{r_2} \right) \quad (120)$$

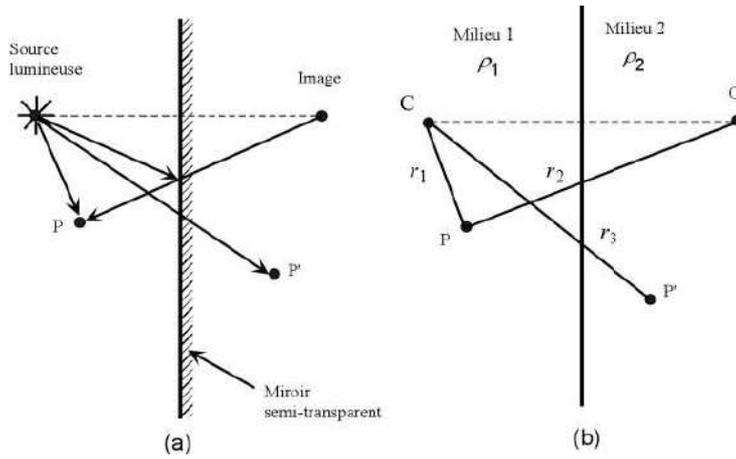


Figure 38. Analogie entre images optique (a) et électrique (b)

Et au point P' par :

$$V' = \frac{I\rho_2}{4\pi} \left( \frac{1-k}{r_3} \right) \quad (121)$$

**Conditions aux limites :**

Le potentiel étant continu, à l'interface ( $r_1 = r_2 = r_3$ ), nous devons avoir ( $V = V'$ ), ce qui permettra d'obtenir :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1-k}{1+k} \quad (122)$$

Ou

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (123)$$

Le coefficient de réflexion vérifie donc  $-1 \leq k \leq +1$ .

La Figure 39 illustre le phénomène de distorsion des équipotentiellles obtenues à l'aide de l'équation (117) pour deux valeurs du coefficient de réflexion ( $k = 0.5$ ;  $-0.5$ ).

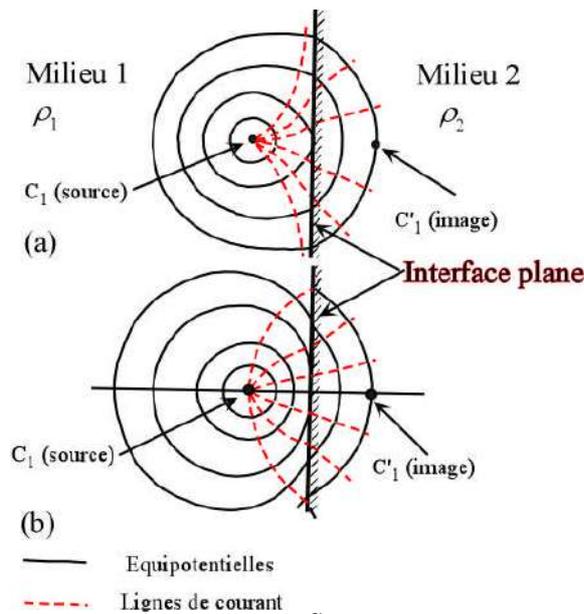


Figure 39. Distorsion des équipotentiellles et des lignes de courant à l'interface de deux milieux de résistivités différentes (a :  $k = 0.5$  et  $\rho_2 = 3\rho_1$  ; b :  $k = -0.5$  et  $\rho_1 = 3\rho_2$  )

#### 9.4.4. Potentiels en surface dus à des couches horizontales

On se place maintenant dans le cas où la source de courant et les deux électrodes de mesure de potentiels sont placées en surface, au dessus de deux couches horizontales de résistivité  $\rho_1$  et  $\rho_2$  séparées par une interface plane. On va utiliser toujours la méthode de la théorie des images pour tacler ce problème qui consiste en fait en 3 milieux qui sont, dans l'ordre, de haut en bas l'air de résistivité  $\rho_a = \infty$ , la couche de résistivité  $\rho_1$  et la couche de résistivité  $\rho_2$  et 2 interfaces : l'interface séparant l'air du milieu 1 de résistivité  $\rho_1$  et l'interface séparant le milieu 1 de résistivité  $\rho_1$  du milieu 2 de résistivité  $\rho_2$ . Le résultat est un nombre infini d'images au dessus et au dessous de la source de courant  $C_1$  (Figure 40).

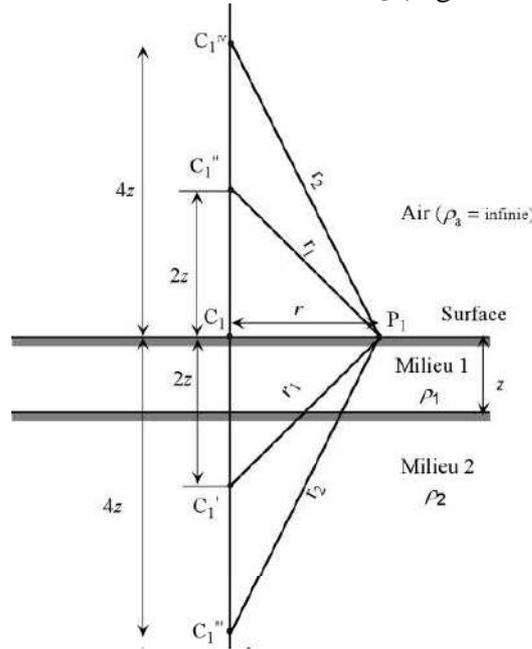


Figure 40. Images résultant de deux couches horizontales

Pour la suite la première interface indiquera l'interface séparant l'air de la première couche et la deuxième interface est celle qui sépare la première couche de la deuxième couche.

L'image originelle  $C_1'$  de  $C_1$  par rapport à la deuxième interface, située donc à  $2z$  en dessous de la surface est elle-même réfléchiée à la première interface et donne une image  $C_1''$  située à la distance  $2z$  au dessus de la surface. Cette deuxième image en donne une troisième image  $C_1'''$  par rapport à la deuxième interface et qui est donc située à  $4z$  en dessous de la surface, et qui à son tour sera réfléchiée sur la première interface pour donner l'image  $C_1''''$ , et ainsi de suite. Donc, une seule source de courant engendre une infinité d'images qui donc participeront à l'expression du potentiel en un point  $P$  de la surface. Notons enfin que l'effet de chaque image sur le potentiel est atténué à cause du coefficient de réflexion entre les interfaces.

Pour la source de courant et sa première image, le potentiel est :

$$V' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{k}{r_1} \right) \quad (124)$$

L'effet de la deuxième image à  $2z$  au dessus de la surface du sol est :

$$V'' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{k.k_a}{r_1} \right) \quad (125)$$

Où  $k_a$  est le coefficient de réflexion à la surface du sol (entre l'air et la première couche). Comme l'air est infiniment résistant ( $\rho_a = \infty$ ) aucun courant ne saura le "traverser", donc ( $1-k_a = 0$ ) et par suite  $k_a = 1$ .

Le potentiel dû à la source  $C_1$  et ses images  $C_1'$  et  $C_1''$  est :

$$V' + V'' = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{2k}{r_1} \right) \quad (126)$$

Le potentiel dû à la troisième image  $C_1'''$  située à  $4z$  sous la surface du sol est encore plus réduit, au même titre que celui dû à son image  $C_1^{IV}$  située à  $4z$  au dessus de la surface du sol.

$$V''' + V^{IV} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{k.k}{r_2} + \frac{k.k.k_a}{r_2} \right) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{2k^2}{r_2} \right) \quad (127)$$

Du fait de la multitude d'images engendrées par la configuration des deux couches horizontales et de la couche d'air, le potentiel total engendré en P est exprimé sous forme d'une série infinie de termes telle que :

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{2k}{r_1} + \frac{2k^2}{r_2} + \dots + \frac{2k^n}{r_n} \right) \quad (128)$$

Où :

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (2z)^2}; r_2 = \sqrt{r^2 + (4z)^2}; r_n = \sqrt{r^2 + (2nz)^2}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (128) sous la forme suivante :

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nz)^2}} \right] \quad (129)$$

Ou encore :

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n}{\sqrt{1 + \left( 2n \frac{z}{r} \right)^2}} \right] \quad (130)$$

Cette série est convergente car  $|k| < 1$ .

On peut reconnaître dans l'expression (130) la valeur du potentiel dans le cas d'un sol homogène :  $\frac{I\rho_1}{2\pi}$  ; c'est le potentiel normal. Le deuxième terme, celui de la série infinie, représente le potentiel perturbateur.

### Remarques

■ Lorsque  $k \approx 1$ , le potentiel total en P peut être doublé, voire plus.

■ Dans le cas de plusieurs couches les calculs seront fastidieux à cause du nombre d'images très importants, mais toujours possibles.

#### 9.4.5. Potentiel dû à une sphère conductrice

On considère une sphère conductrice de résistivité  $\rho_2$  enterrée dans un milieu de résistivité  $\rho_1$  (Figure 41). Il s'agit de trouver les solutions de l'équation de Laplace dans le contexte de la configuration illustrée par la figure. On suppose en plus que la sphère baigne dans un champ électrique uniforme  $E$  parallèle à l'axe des  $x$  c'est-à-dire que l'électrode d'injection est placée très loin de la sphère.

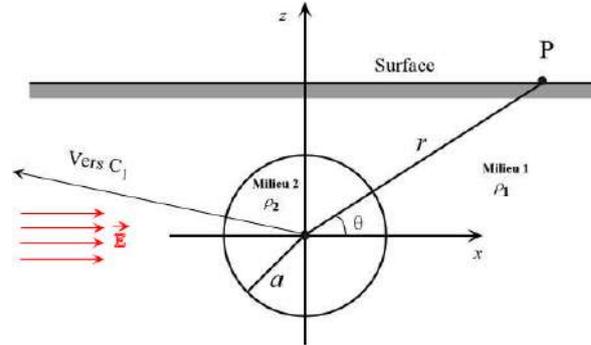


Figure 41. Sphère conductrice baignant dans un champ électrique uniforme

L'équation de Laplace à résoudre, s'écrit dans ce cas, en coordonnées sphériques:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (131)$$

Cette équation est indépendante de la longitude  $\varphi$ , et soumise aux conditions aux limites citées précédemment (continuité du potentiel et de la composante normale du vecteur densité de courant) :

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V_2 \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} \end{array} \right\} \text{pour } r = a \quad (132)$$

$$V_1 = -E \cdot x = -E \cdot r \cos \theta \text{ pour } r \gg a$$

Nous n'entrerons pas dans les détails, mais donnerons simplement la solution de ce problème au cas où le potentiel est mesuré à la surface :

$$V_1 = -\frac{I \rho_1}{2\pi R^2} \left\{ 1 - 2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} \left( \frac{a}{z} \right)^3 \right\} r \cos \theta \quad (133)$$

La Figure 42 illustre les lignes de courant et les équipotentielles obtenus dans le cas de cette configuration, on notera leur distorsion.

Cet exemple permet de voir qu'en cas d'hétérogénéité du sous-sol, les lignes équipotentielles et de courant s'en trouvent déformées, de sorte que, comme le montre la Figure 42, (une masse conductrice enclavée dans un milieu résistant) les lignes de courant ont tendance à converger vers la masse conductrice, alors que les lignes équipotentielles s'en éloignent. On doit s'attendre au contraire dans le cas d'une masse résistante piégée au sein d'une formation l'étant moins.

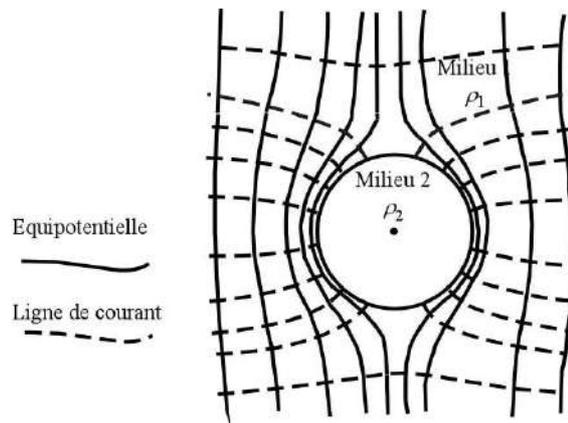


Figure 42. Equipotentiels et lignes de courant pour une sphère enterrée (vue de plan).

En conclusion on voit bien que la méthode des résistivités permet, pour un écartement constant des électrodes de courant, de détecter les anomalies électriques du sous-sol situées à une profondeur plus ou moins constante et ce en réalisant plusieurs profils de mesures pour intéresser une grande surface : c'est la méthode du **trainé électrique**.

Mais on peut aussi vouloir s'enquérir des anomalies électriques en profondeur à la vertical d'un certain point, c'est la méthode des **sondages électriques**.

#### 9.4.6. Sondages électriques

Là aussi pour recueillir les informations nécessaires nous nous devons d'être munis de deux électrodes de courant et de deux électrodes de potentiel, en plus d'une source de courant (générateur). Contrairement à ce que nous avons dit précédemment, l'écartement des électrodes de courant doit varier et ce dans le but de pouvoir intéresser plus de volume de terrain en profondeur. Les dispositifs utilisés sont nombreux, nous en citerons le dispositif de Wenner (Figure 43) et celui de Schlumberger (Figure 44).

##### → Dispositif de Wenner

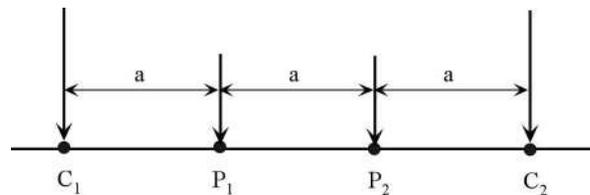


Figure 43. Dispositif de Wenner

##### → Dispositif de Schlumberger

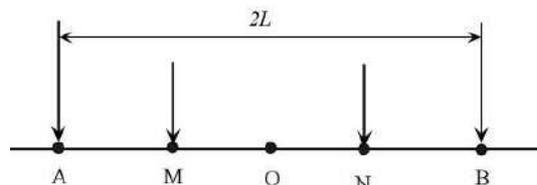


Figure 44. Dispositif de Schlumberger

Si le sous-sol est homogène et isotrope, on aura quelque soit la configuration du quadripôle AB-MN la même résistivité qui correspond à la résistivité vraie du terrain. Or dans la réalité le sous-sol est hétérogène et est formé de plusieurs couches superposées. La résistivité que

l'on mesure donc est une résistivité apparente et ne concerne que le volume de terrain circonscrit dans le réseau des lignes de courant.

Pour les besoins de l'illustration considérons un terrain bi-couche de résistivités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Nous introduisons un courant entre deux électrodes de courant A et B qu'on fait éloigner progressivement des deux électrodes de mesure de potentiel M et N que l'on garde fixes (Figure 45)

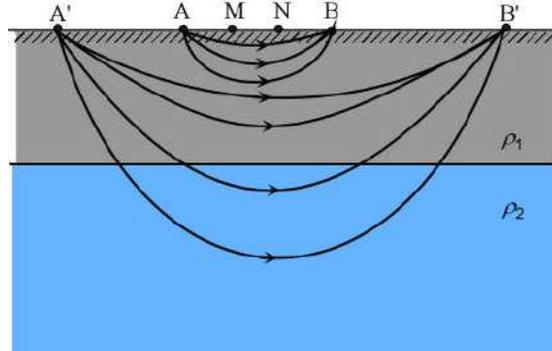


Figure 45. Résistivité apparente (terrain bicouche)

Pour des valeurs de  $\frac{AB}{2}$  petites devant l'épaisseur du premier terrain, on peut affirmer que la résistivité mesurée est celle de la première couche, tandis que pour des valeurs importantes de  $\frac{AB}{2}$ , la résistivité mesurée est celle de la deuxième couche. Pour des valeurs intermédiaires de  $\frac{AB}{2}$ , la résistivité mesurée dépend en fait des deux formations (Figure 46).

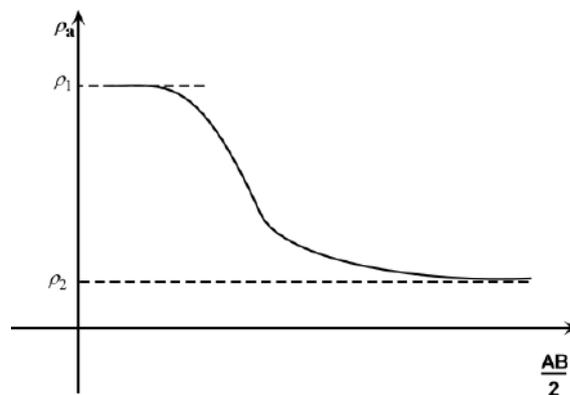


Figure 46. Courbe de résistivité dans le cas d'un bicouche

Le sondage électrique SE, permet une investigation en profondeur grâce à une variation de la longueur d'émission AB tout en maintenant MN constante.

Les résultats d'un sondage électrique sont présentées sur un papier bi-logarithmique

$$\left( \log \rho_a = f \left( \log \left( \frac{AB}{2} \right) \right) \right) \text{ donnant}$$

#### 9.4.7. Interprétation des sondages électriques

L'interprétation des sondages est une opération qui consiste à imaginer la structure (les structures ?) ayant engendré un profil de résistivité donné. Nous avons vu précédemment que

quand on connaît une configuration géologique déterminée on sait calculer le potentiel engendré. Dans le cas de l'interprétation il s'agit du problème inverse (Figure 47).

*Exemple :*

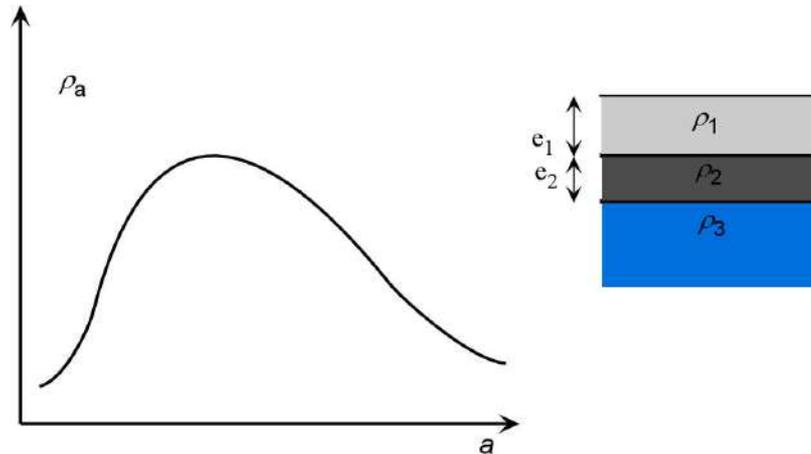


Figure 47. Exemple d'interprétation de sondage électrique

L'interprétation des sondages électriques peut se faire globalement de deux manières :

→ **Numériquement**

A l'aide des ordinateurs et ce en résolvant l'équation du potentiel ( $\Delta V = 0$ ) avec des conditions aux limites appropriées. Pour ce faire, on introduit la courbe donnant la résistivité en fonction de l'écartement ( $\rho_a = f(a)$ ) et en fonction du choix de modèle géologique, on fait varier les paramètres c'est-à-dire les **résistivités** des couches et leurs **épaisseurs** jusqu'à obtention d'une superposition satisfaisante avec les données expérimentales.

→ **Graphiquement**

A l'aide de courbes établies préalablement (abaques) et d'autres méthodes graphiques telles que la méthode des résistivités cumulatives et de la méthode des asymptotes dont on aura l'occasion de parler en TP.

-----FIN-----

## Chapitre 3

### LE CHAMP DE PESANTEUR

#### 1. Principe et théorie élémentaire

##### 1.1. Loi de Newton

Considérons deux particules de masse  $m_1$  et  $m_2$ . Les deux particules s'exercent mutuellement une **force d'attraction**  $\vec{F}$  (Figure 1). :  $\vec{f}_{1/2}$  exercée par 1 sur 2 et  $\vec{f}_{2/1}$  exercée par 2 sur 1.

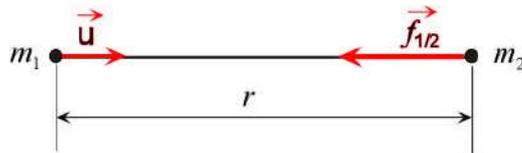


Figure 1. La force d'attraction entre deux particules de masse  $m_1$  et  $m_2$

Notons  $\vec{F} = \vec{f}_{1/2}$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

$G$  est la constante de gravitation universelle. Sa valeur dans le système international est :  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

##### 1.2. Accélération de la pesanteur

Remplaçons l'une des particules par la Terre (Figure 2). Soit par exemple  $m_1 = M_e$  la masse de la Terre. Appelons  $\vec{g}$  l'accélération de la particule  $m_2$ .

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la particule  $m_2$ . Nous aurons :

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad (2)$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_2} = -G \frac{M_e}{R_e^2} \vec{u} \quad (3)$$

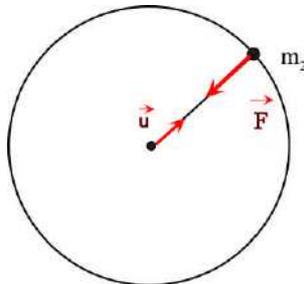


Figure 2. Poids d'une particule située à la surface de la terre

Cette accélération, appelée accélération de la pesanteur a d'abord été mesurée par Galilée, lors de la célèbre expérience de la tour de Pise en laissant tomber des objets du sommet de la tour penchée. La valeur numérique à la surface de la Terre est environ  $980 \text{ cm/s}^2$ . En gravimétrie l'unité d'accélération de la pesanteur  $1 \text{ cm/s}^2$  est appelée le **gal**.

### 1.3. Potentiel gravifique

#### 1.3.1. Généralités

Soit une particule  $m_2$  se déplaçant dans le champ gravifique créé par  $m_1$  (Figure 3). Calculons la circulation du champ gravifique  $\vec{\Gamma}$  créé par  $m_1$ , le long de  $\widehat{AB}$ .

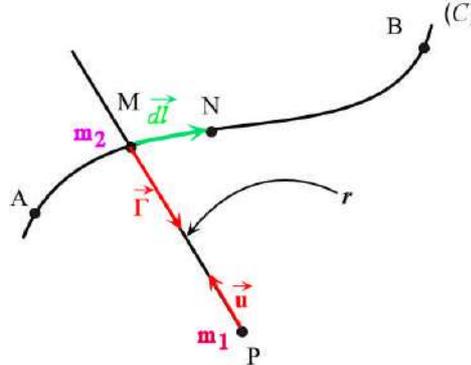


Figure 3. Potentiel gravifique créé par une masse ponctuelle.

On va procéder comme en électricité (Chapitre 2, §3.1)

*En coordonnées sphériques (P étant le centre du système)*

$$\vec{\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma_r = -G \frac{m_1}{r^2} \\ \Gamma_\theta = 0 \\ \Gamma_\phi = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{dl} \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{pmatrix}$$

La circulation élémentaire du champ gravifique  $\vec{g}$  est donnée par :

$$dC = \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl} = -G \frac{m_1 dr}{r^2} = Gm_1 d\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4)$$

La circulation le long de la courbe AB est alors :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl} = Gm_1 \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (5)$$

On peut voir clairement que la circulation du champ gravifique  $\vec{\Gamma}$ , créé par une masse ponctuelle  $m_1$ , le long d'une courbe est **indépendante** du chemin suivi. On aura :

$$\oint \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (6)$$

Et par conséquent (voir la Boîte à outils), le champ gravifique est conservatif. Soit :

$$\vec{\Gamma} = -\vec{\text{grad}}U \quad (7)$$

Reprenons l'expression de la circulation élémentaire :

$$dC = \vec{\Gamma} \cdot \vec{dl} = -\vec{\text{grad}}U \cdot \vec{dl} = -dU = G.m_1.d\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8)$$

La solution de cette équation différentielle, en supposant le potentiel nul à l'infini, est :

$$U(r) = -G \cdot \frac{m_1}{r} \quad (9)$$

Dans le cas où le vecteur  $\vec{u}$  de la Figure 3 est de sens opposé, c'est-à-dire dirigé de M vers P, le potentiel est positif :  $U(r) = G \cdot \frac{m_1}{r}$ . C'est le cas en gravimétrie où l'axe z est orienté vers le centre de la terre.

*Remarque :*

Il est souvent plus simple de résoudre les problèmes de gravité en calculant le potentiel scalaire, au lieu de  $\Gamma$ .

### 1.3.2. Potentiel Tridimensionnel

Considérons une masse à 3 dimensions et de forme quelconque et calculons le champ gravifique et le potentiel dus à cette distribution massique, en un point situé à l'origine du repère  $(O, x, y, z)$ . Le potentiel créé par une masse infinitésimale  $dm$  :

$$dU = G \frac{dm}{r} = G \frac{\sigma dx dy dz}{r} \quad (10)$$

Où  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Le potentiel dû à la masse totale sera :

$$U = G\sigma \iiint_V \frac{1}{r} dx dy dz \quad (11)$$

La composante verticale du champ gravifique est donnée par :

$$\Gamma_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = G\sigma \iiint_V \frac{z}{r^3} dx dy dz \quad (12)$$

### 1.4. Equations du potentiel

On se propose de calculer le flux du champ gravifique à travers une surface fermée, soit :

$$\Phi = \iint_S \vec{\Gamma} \cdot \vec{dS} \quad (13)$$

Calculons pour cela le flux dû à une masse ponctuelle  $m$ . Pour ce faire considérons les 3 cas de figure comme pour le champ électrostatique (Chapitre 2, section 4 §4.2)

Configuration 1 : Masse située à l'extérieur de la surface fermée (Figure 4)

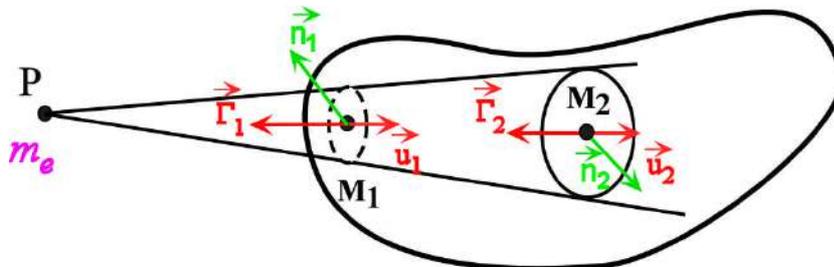


Figure 4. Flux du champ gravifique à travers une surface fermée (configuration n°1)

$$d\Phi = -Gm_e \left[ \frac{\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^2} + \frac{\vec{u}_2 \cdot d\vec{S}_2}{r_2^2} \right]$$

↑ Angle solide

(14)

$$\Phi = 0$$

Configuration 2 : Masse située à l'intérieur de la surface fermée (Figure 5)

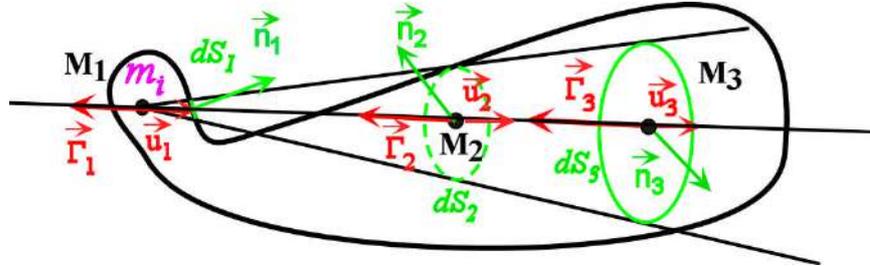


Figure 5. Flux du champ gravifique à travers une surface fermée (configuration n°2)

$$d\Phi = -Gm_i \frac{\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}_1}{r_1^2} = -Gm_i d\Omega$$

$$\Phi_{\text{Total}} = -Gm_i \iint_S d\Omega = -4\pi Gm_i$$

(15)

Configuration 3 : Masse située à la surface de la surface fermée (Figure 6)

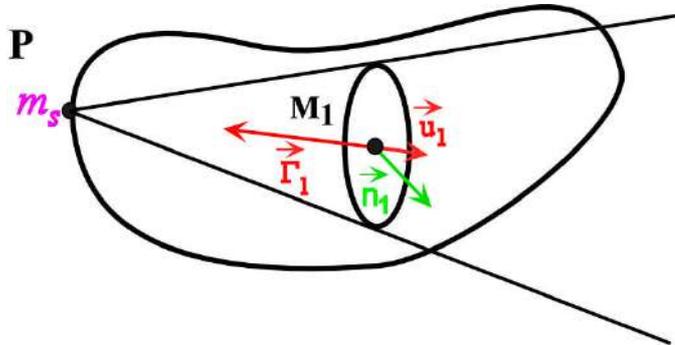


Figure 6. Flux du champ gravifique à travers une surface fermée (configuration n°3)

$$d\Phi = -Gm_s d\Omega$$

$$\Phi = -\iint_S Gm_s d\Omega = -Gm_s \iint_S d\Omega = -2\pi Gm_s$$

(16)

### Conséquences :

→ Dans le cas où il n'y a pas de masse à l'intérieur de la surface, le flux du champ gravifique à travers cette surface est nul. Par conséquent, en vertu du théorème de Green-Ostrogradsky

$$\text{div} \vec{\Gamma} = 0$$

(17)

Le champ gravifique dérive d'un potentiel, d'où l'équation de Laplace suivante:

$$\Delta U = 0$$

(18)

→ Si par contre, des masses sont présentes à l'intérieur de la surface, le flux du champ gravifique n'est pas nul. Nous obtenons alors :

### **Théorème de Gauss**

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\Gamma} d\tau = \iint_{S, \text{ fermée}} \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \quad (19)$$

$M$  étant la masse totale de toutes les masses situées à l'intérieur de la surface.

De l'équation (19) nous déduisons, en prenons un volume aussi petit que l'on veut :

$$\operatorname{div} \vec{\Gamma} d\tau = -4\pi G \rho d\tau \quad (20)$$

Soit :

$$\operatorname{div} \vec{\Gamma} = -4\pi G \rho \quad (21)$$

$\rho$  étant la densité de la masse à l'origine du champ gravifique.

Or le champ gravifique dérive d'un potentiel, d'où l'équation de Poisson suivante:

$$\Delta U = 4\pi G \rho \quad (22)$$

### **Remarque**

Ces équations sont générales et donc valables en ce qui concerne le champ de pesanteur terrestre.

## **2. Application à la Pesanteur terrestre : Gravimétrie**

### **2.1. Forme de la Terre**

#### **2.1.1. Généralités**

La valeur de la pesanteur à la surface de la terre dépend de 5 facteurs :

- La latitude
- L'altitude
- La topographie environnante
- Les marées terrestres ou l'effet lunisolaire
- Les variations de densité sous la surface

Les variations de la pesanteur dues aux 4 premiers facteurs sont systématiques. Par exemple la variation de la pesanteur de l'équateur aux pôles est de  $5 \text{ gal}$ , soit 0.5% de la valeur moyenne, alors que l'influence de l'altitude peut atteindre  $0.1 \text{ gal}$  dans certains cas. Seul le dernier facteur est significatif en prospection gravimétrique : au dessus d'un corps lourd la pesanteur sera plus forte qu'au dessus d'un corps léger.

Les variations de  $g$  qui sont significative en prospection gravimétrique sont très petites ( $10 \text{ mgal}$  serait une grande anomalie en prospection pétrolière), non seulement devant la valeur de  $g$  elle-même mais aussi devant les variations dues à l'altitude ou à la latitude, choses qu'il faut éliminer pour ne laisser que l'effets recherché à savoir celui de la variation de densité sous la surface.

#### **2.1.2. Le sphéroïde de référence**

La surface de la terre est définie comme une surface équipotentielle du champ de pesanteur. Cette surface est le sphéroïde de référence, il est confondu avec la surface figurant la hauteur

moyenne des mers : les masses terrestres en excès étant supprimées et les creux marins comblés.

Le système géodésique de référence donne la valeur de  $g$  en tout point du sphéroïde :

$$g = g_0(1 + \alpha \sin^2 \lambda + \beta \sin^4 \lambda) \quad (23)$$

$g_0 = 978.031846$  (valeur de la pesanteur à l'équateur)

$\lambda$  : La latitude

$\alpha = 0.005278895$

$\beta = 0.000023462$

### 2.1.3. Le géoïde

La formule donnant  $g$  n'est qu'une approximation. On omet l'existence d'ondulations à la surface de la Terre, alors qu'il y a en fait, des altitudes moyennes continentales de 500 m et des profondeurs océaniques de 9000 m, ce qui a poussé les géodésiens à adopter une surface de référence aussi proche de la réalité que possible : le géoïde, qui est aussi le niveau moyen expérimental des mers (Figure 7).

La différence entre les deux surfaces ne dépasse pas les 100 m.

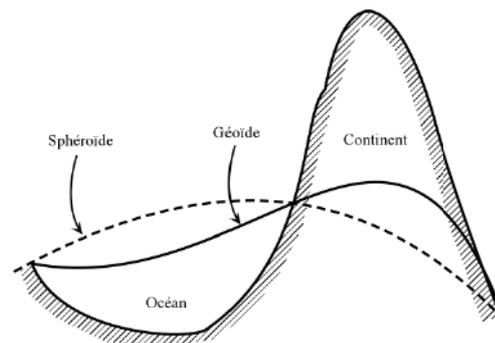


Figure 7. Géoïde et sphéroïde de référence

## 2.2. Les corrections de la mesure de la pesanteur

L'intensité de la pesanteur dépend de 5 facteurs : la latitude, la hauteur, la topographie avoisinante, l'effet des marées et la variation de la densité des matériaux de subsurface. Ce sont les variations de densité qui nous intéressent en gravimétrie. Ces anomalies sont moins marquées que les anomalies dues aux changements des autres facteurs, d'où l'intérêt de corriger les données gravimétriques.

### 2.2.1. Correction de la latitude

La rotation de la Terre et son bourrelet équatorial provoquent l'augmentation de la pesanteur avec la latitude systématiquement. L'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre (maximale à l'équateur et nulle aux pôles) s'oppose à l'accélération de la pesanteur alors que l'aplatissement augmente la pesanteur aux pôles. Ce dernier effet est partiellement compensé par l'augmentation de la masse attirante à l'équateur. Il est donc nécessaire de faire une correction de la latitude dès qu'il y a une extension notable dans la direction NS (Figure 8).

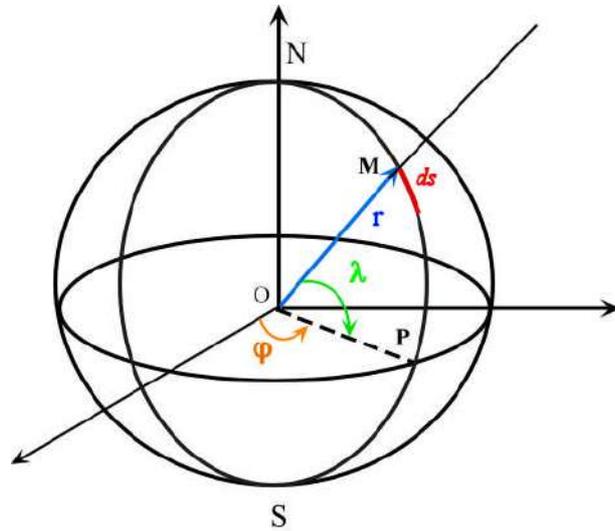


Figure 8. Correction de la latitude.

Soit  $dg_L$  cette correction,  $R_e$  le rayon de la Terre,  $ds$  la distance dans la direction NS et  $\lambda$  la latitude.

$$\frac{dg_L}{ds} = \frac{dg_L}{R_e d\lambda} \text{ soit}$$

$$\frac{dg_L}{ds} \simeq \frac{1}{R_e} g_0 (2\alpha \sin \lambda \cos \lambda + 4\beta \sin^3 \lambda \cos \lambda) \quad (24)$$

D'où

$$\frac{dg_L}{ds} \simeq \frac{g_0 \alpha}{R_e} \sin 2\lambda \quad (25)$$

AN :

■  $R_e = 6368 \text{ Km}$

■  $\frac{dg_L}{ds} = 0.811 \sin 2\lambda \text{ mgal/Km}$

### 2.2.2. Correction à l'air libre

La pesanteur varie inversement avec le carré de la distance au centre (Figure 9). Il est donc impératif de corriger les différences d'altitude entre les différents points de mesure, afin de ramener toutes les lectures à ce qu'elles seraient sur une surface de référence.

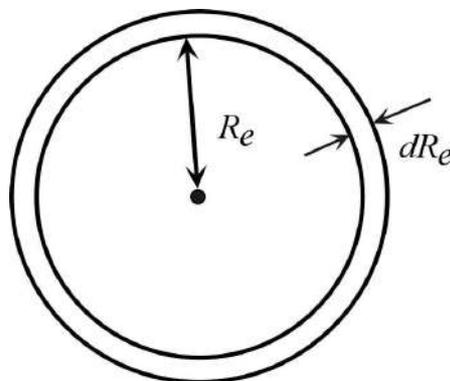


Figure 9. Correction à l'air libre.

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2} \Rightarrow \frac{dg_{FA}}{dR_e} = -2G \frac{M_e}{R_e^3} \cong -\frac{2g}{R_e} \quad (26)$$

AN :

$$\frac{dg_{FA}}{dR_e} = -0.3086 \text{ mgal/m}$$

La présence du signe (-) signifie que la correction est ajoutée aux lectures lorsque la station de mesure est au dessus du plan de référence (géoïde, niveau de la mer).

### 2.2.3. Correction de Bouguer

La correction de Bouguer tient compte de la couche de terrain entre la station et le plan de référence.

Supposons la station de mesure située au centre d'un très grand plateau horizontal (Figure 10) que nous assimilerons, pour les besoins du calcul, à une couronne sphérique de rayon  $R_e$ , d'épaisseur  $dR_e$  et de densité  $\rho$ .

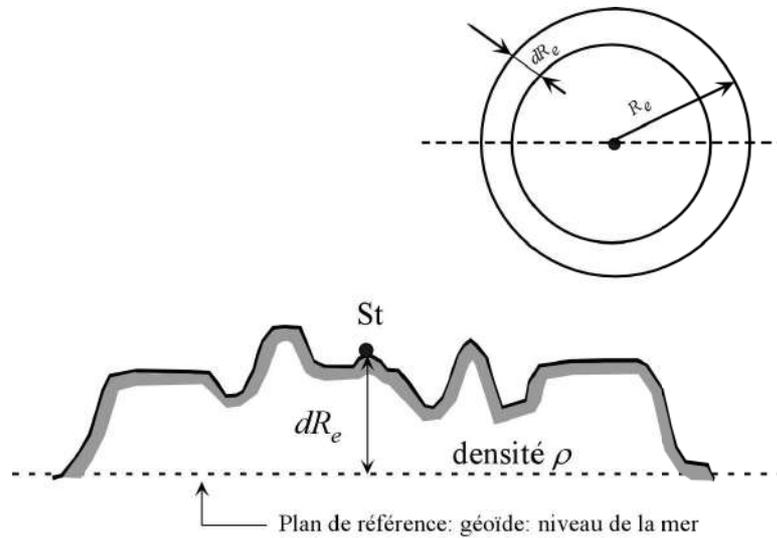


Figure 10. Principe du calcul de la correction de Bouguer

Calculons l'influence  $dg_B$  de la masse de cette couronne (il s'agit en fait de la demi-couronne) sur la mesure de  $g$ .

$$dg_B = G \frac{m_{dc}}{R_e^2} = G\rho \frac{1}{R_e^2} \left( \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi (R_e^3 - (R_e - dR_e)^3) \right) \quad (27)$$

Soit

$$dg_B = \frac{4}{6} G\rho\pi \left( 3dR_e - \frac{3}{dR_e} (dR_e)^2 + \frac{(dR_e)^2}{R_e^2} \right) \quad (28)$$

$$dg_B = 2\pi G\rho \cdot dR_e \left( 1 - \frac{dR_e}{R_e} + \frac{(dR_e)^2}{3R_e^2} \right) \quad (29)$$

En négligeant les termes en  $\frac{1}{R_e^n}$ , il vient :

$$dg_B = 2\pi G\rho \cdot dR_e \quad (30)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{dg_B}{dR_e} = 2\pi G\rho \quad (31)$$

AN :

$$\frac{dg_B}{dR_e} = 0.04192\rho \text{ mgal/m}$$

En supposant une densité moyenne de 2.67 pour les roches de la croûte,  
 $dg_B = 0.112.dR_e$  mgal

La correction de Bouguer est opposée à celle à l'air libre : elle est soustraite si la station est au dessus du plan de référence et vice versa.

#### 2.2.4. Correction topographique

Cette correction topographique tient compte des irrégularités de la surface du sol à proximité de la station (colline s'élevant au dessus de la station et vallées situées au dessus). Ces formes de relief agissent dans le même sens sur les mesures gravimétriques : elles diminuent les lectures à cause de l'attraction au dessus (colline) et du déficit d'attraction au dessous (vallées). Il en résulte que la correction topographique s'ajoute toujours à la lecture.

#### 2.2.5. Correction lunisolaire (correction de la dérive instrumentale)

Les instruments de mesure du champ de pesanteur sont très sensibles si bien qu'ils soient influencés par les variations de  $g$  dues aux mouvements du soleil et de la lune. Théoriquement on peut calculer cette influence mais dans la pratique on l'obtient à partir des corrections de la dérive instrumentale.

Qu'est ce que la dérive instrumentale ?

C'est le fait que des lectures répétées à une même station ne donnent jamais la même valeur, ceci est dû essentiellement à la fatigue des ressorts et aussi au transport de l'appareil de mesure. Il est donc nécessaire au cours d'une campagne de mesure du champ de pesanteur de réoccuper périodiquement certaines stations pour tracer la courbe de dérive de l'appareil. L'intervalle de temps maximal entre deux lectures répétées dépend de la précision recherchée mais dépasse rarement 2 à 3 heures. Dans ce cas on considère que la dérive instrumentale varie linéairement avec le temps et on peut ainsi interpoler la valeur aux points de mesure.

#### 2.2.6. Correction isostatique

Cette correction s'impose quand on couvre de grandes zones, si bien que la correction des effets de densité s'impose, par exemple la densité des fonds océaniques et celle des roches du continent. A une petite échelle donc, cette correction est tout simplement omise.

### 2.3. Anomalie de Bouguer

Une fois que toutes les corrections précédentes ont été faites sur les lectures effectuées, nous obtenons la valeur de l'anomalie de Bouguer à la station :

$$g_B = g_{obs} - g_{th} + (dg_L + dg_{FA} - dg_B + dg_T) \quad (32)$$

$g_{obs}$  : lecture à la station

$g_{th}$  : valeur théorique de la pesanteur

$dg_L$  : correction de latitude

$dg_{FA}$  : correction à l'air libre

$dg_B$  : correction de Bouguer

$dg_T$  : correction topographique

## 2.4. Densité des roches et des minéraux

Le paramètre significatif en prospection gravimétrique est la variation locale de la densité. Ceci exige une bonne connaissance de ce facteur. On prendra pour les besoins de ce cours la valeur moyenne de 2.67, sauf cas particulier. Le tableau suivant donne la valeur moyenne de la densité de certains matériaux.

Roche	Densité moyenne (g/cm <sup>3</sup> )
Limons secs	1.6
Limons saturés d'eau	2
Sables et Graviers secs	1.8
Sables et Graviers saturés	2.1
Argiles	2.1
Sels et Gypses	2.2
Marnes	2.2
Grès	2.3
Calcaires et Dolomies	2.5
Schistes	2.6
Granite	2.7
Gneiss	2.8
Laves	2.9

## 2.5. Traitement des données de la pesanteur

### 2.5.1. Généralités

La carte de l'anomalie de Bouguer donne en chaque station la différence entre la valeur corrigée de  $g$  relative à la station considérée et à la valeur théorique de  $g$ . Les courbes iso-anomales en gravimétrie sont en général très lisses et ce à cause des variations légères de la densité.

### **Problème**

Soit une masse sphérique de 120 m de diamètre dont le sommet est à 60 m de profondeur. Exactement au dessous, il y a un décrochement vertical de 300 m du socle à une profondeur de 1500 m (Figure 11). Pour des contrastes égaux de densité, l'effet de la sphère n'est que quelques centièmes de celui de l'accident du socle. Or, on cherche l'anomalie due à la sphère alors que celle-ci est masquée par l'anomalie due au décrochement du socle. On doit donc éliminer l'anomalie due au socle (l'anomalie non désirée).

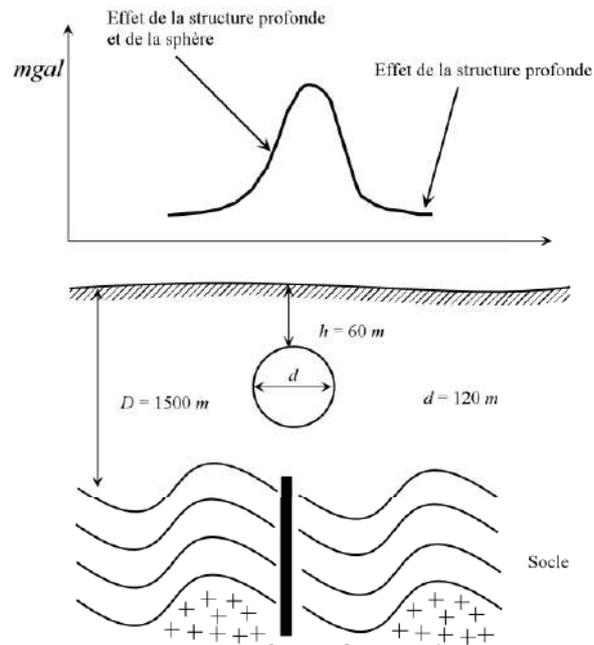


Figure 11. Effet des structures profondes et superficielles

Les structures profondes et étendues prédominent sur une carte ou profil gravimétrique au point de rendre la reconnaissance de celles qui sont plus petites ou moins profondes est difficile.

### 2.5.2. Anomalies régionale et résiduelle

Les anomalies intéressantes sont le plus souvent masquées par l'effet des structures profondes. il faut alors procéder à l'élimination de la régionale. Nous utiliserons pour cela une méthode graphique toute simple. D'autres méthodes plus élaborées seront étudiées en 3<sup>ème</sup> de Licence.

#### **Méthode de lissage**

On va se contenter simplement de déterminer la résiduelle dans le cas du profil (Figure 12).

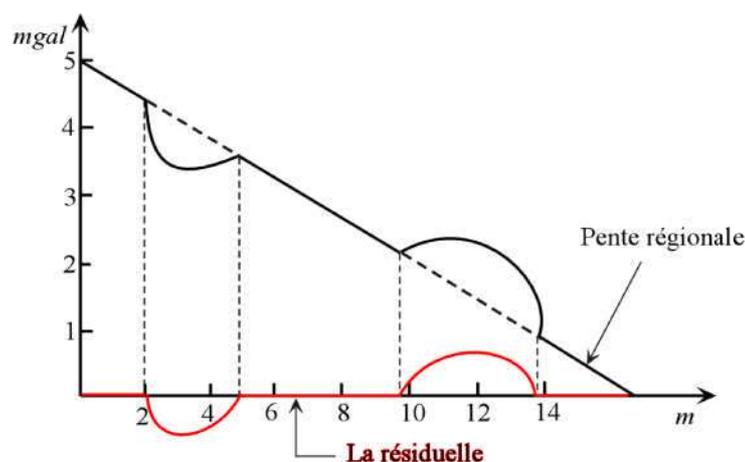


Figure 12. Anomalies régionale et résiduelle

Le profil présente deux anomalies. La résiduelle s'obtient en soustrayant les courbes lissées (en pointillé) des courbes initiales.

## 2.6. Effets de formes simples

Ce n'est qu'après avoir mis en évidence la résiduelle que l'interprétation géophysique, c'est-à-dire la comparaison des anomalies avec celles de quelques formes simples, peut être entreprise.

### 2.6.1. Sphère

Soit une sphère de densité  $\rho_2$  et de rayon  $a$ , située à une profondeur  $z$  de la surface du sol et encaissée dans un terrain de densité  $\rho_1$  (Figure 13). On se propose de déterminer l'effet de la sphère à la surface.

L'attraction due à la sphère au point P est dirigée suivant  $r$ .

$$g_r = G \frac{M}{r^2} \quad (33)$$

La composante verticale est donnée par :

$$g = g_r \cos \theta = G \frac{Mz}{r^3} = \frac{4\pi G \rho a^3}{3} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (34)$$

Soit :

$$g = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho a^3}{z^2 \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (35)$$

$$g_{\max} = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho a^3}{z^2} \quad (36)$$

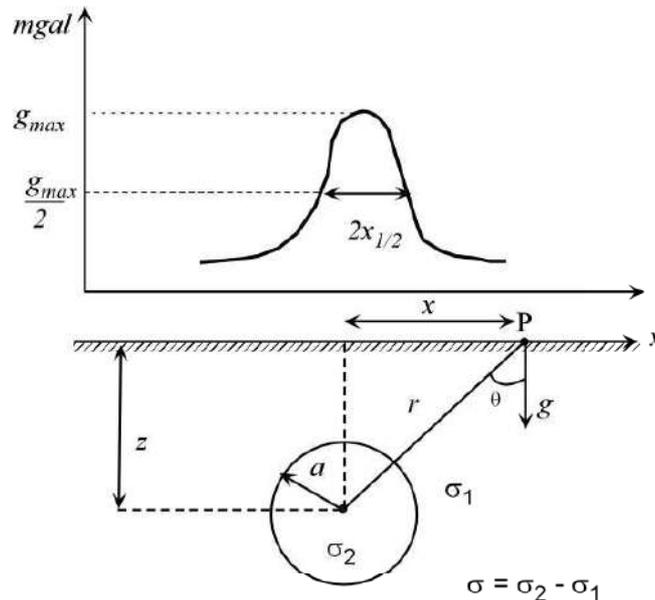


Figure 13. Effet gravifique d'une sphère

On peut tirer  $z$  de la courbe principale en fonction de la demi-largeur ( $x_{1/2}$ ) correspondant à la moitié de la valeur maximale de  $g$ , soit  $\frac{g_{\max}}{2}$  (Figure 13).

$$z = 1.3 \cdot x_{1/2} \quad (37)$$

On peut calculer aussi  $M$ . Pour cela on résout l'équation :

$$\frac{1}{2} g_{\max} = \frac{GM}{z^2 \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (38)$$

Pour ce cas de figure :  $z = 1.3 \cdot x_{1/2}$ .

$$\frac{1}{2} g_{\max} = \frac{GM}{1.3^2 x_{1/2}^2 \left(1 + \frac{x_{1/2}^2}{1.7 x_{1/2}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} g_{\max} = \frac{GM}{1.7 x_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{1.7}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} g_{\max} = \frac{GM}{1.7 x_{1/2}^2 (1.58)^{\frac{3}{2}}} \quad (41)$$

$$\frac{1}{2} g_{\max} = \frac{GM}{1.7 x_{1/2}^2} \frac{1}{2} \quad (42)$$

$$1.7 x_{1/2}^2 g_{\max} = GM \quad (43)$$

Soit

$$M = \frac{1.7 x_{1/2}^2 g_{\max}}{G} \quad (44)$$

$$M = \frac{1.7 x_{1/2}^2 g_{\max}}{6.67 \times 10^{-8}} \quad (45)$$

$$M = 0.2548 \times 10^8 \times x_{1/2}^2 \times g_{\max} \text{ (grammes)} \quad (46)$$

Soit en tonnes :

$$M = 25.5 \times x_{1/2}^2 \times g_{\max} \text{ (tonnes)} \quad (47)$$

La forme sphérique est très commode pour une première approximation des anomalies à 3 dimensions lorsqu'elles sont symétriques.

### 2.6.2. Cylindre épais vertical

L'attraction en un point situé en dehors de l'axe n'est pas facile à calculer, sauf lorsque le cylindre est infini. Par contre le calcul est aisé lorsqu'il s'agit de calculer l'attraction en un point de l'axe du cylindre. (Le calcul est à faire par les étudiants).

### 2.6.3. Calcul de l'excès de masse

Soit la surface,  $\Sigma = H + \pi(z = 0)$  (Figure 14), où H est la demi-sphère de rayon R et le plan de référence  $\pi(z = 0)$ .

Calculons le flux du champ gravifique dû à la masse M à travers la surface fermée  $\Sigma$ .

$$\iint_{\Sigma} \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = 4\pi GM \quad (48)$$

$$\iint_{\pi(z=0)} \Gamma_n dx dy + \iint_H \vec{\Gamma} \cdot \vec{dS} = 4\pi GM \quad (49)$$

Le rayon étant quelconque, nous le prenons aussi suffisamment grand pour que M puisse être considéré comme une masse ponctuelle et  $x = R$ . Pour le plan de référence,  $\Gamma_n$  peut être remplacé par l'anomalie résiduelle.

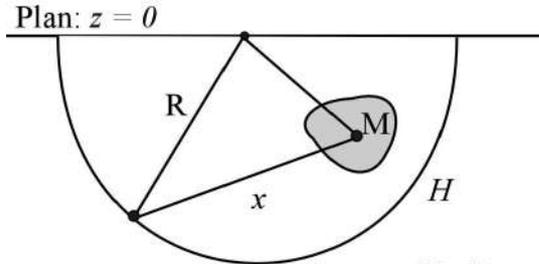


Figure 14. Calcul de l'excès de masse

$$\iint_H \Gamma \cdot dS = \frac{1}{2} \iint_{\text{Sphère}} \Gamma \cdot dS = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^2} 4\pi R^2 = 2\pi GM \quad (50)$$

Il s'ensuit alors que :

$$\iint_{\pi(z=0)} \Gamma_n dx dy = 2\pi GM \quad (51)$$

Par conséquent :

$$M = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(x,y) dx dy \quad (52)$$

En pratique la masse M est obtenue en décomposant la zone étudiée en éléments de taille convenable, en estimant la résiduelle moyenne pour chaque élément et calculer la somme de tous les produits élémentaires de la résiduelle moyenne par la surface de l'élément correspondant et ensuite en divisant la somme obtenue par  $2\pi G$ .

-----FIN-----

## Chapitre 4

# CHAMP MAGNETIQUE ET MAGNETISME TERRESTRE

### 1. Introduction

#### 1.1. Aperçu historique

Dès l'antiquité, Thalès (625 av JC—546av JC) évoqua l'idée de l'existence d'un minéral noir appelée **magnétite** contre lequel collaient les clous des chaussures des bergers, aux alentours de la localité de **Magnésie** en Asie mineure (Turquie actuelle). Plus tard, on identifia chimiquement cette magnétite puisqu'il s'agissait en fait d'un oxyde de fer, le **Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>**.

Depuis le dixième siècle de notre ère, les Chinois constatèrent la particularité des aiguilles aimantées à s'orienter plus ou moins dans la direction du Nord Géographique (il s'agit en fait du Nord magnétique) et s'en servirent pour la construction de leurs villes. La boussole fut inventée. Le pôle de la boussole pointant vers le Nord Géographique, porta depuis le nom de pôle Nord et son opposé celui de pôle Sud.

Neuf siècles plus tard, en 1820, Oersted, physicien Danois mit en évidence l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée, ce qui donna naissance à une nouvelle branche de la physique, l'électromagnétisme.

Toujours en 1820 les savants Français Biot et Savart exprimèrent la force, engendrée par un fil conducteur parcouru par un courant électrique, agissant sur le pôle d'un aimant. Toujours à la même époque, Ampère formula la force exercée par un aimant sur un fil conducteur parcouru par un courant électrique (l'inverse de la loi de Biot et Savart).

#### 1.2. Propriétés des aimants

→ Les propriétés d'un aimant se manifestent à ses extrémités, appelés les pôles. On distingue le pôle Nord et le pôle Sud (Figure 1)

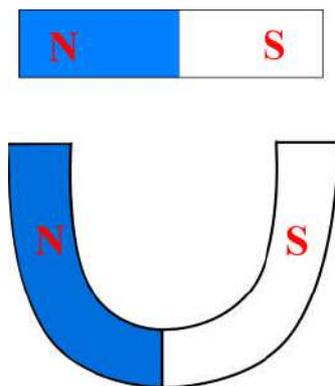


Figure 1. Pôles Nord et Sud d'un barreau aimanté et d'un aimant en U.

→ Les deux pôles d'un aimant coexistent ensemble. Il est impossible de les séparer. Si on casse un aimant on assistera à la création de deux autres aimants avec deux pôles chacun et ainsi de suite. Cette propriété (possession de deux pôles) souligne en fait la différence entre le

champ magnétique et le champ électrostatique, où une seule charge est en mesure de créer elle-même son propre champ.

### 1.3. Qu'est ce que le champ magnétique ?

Un aimant ou un conducteur parcouru par un courant électrique crée autour de lui un champ magnétique : c'est la région de l'espace où en chacun de ses points, le pôle d'une aiguille aimantée se trouve soumis à une force pouvant être attractive ou répulsive. Le champ magnétique ressemble en ce sens au champ électrique et les deux diffèrent du champ de pesanteur qui n'engendre que des forces d'attraction.

#### → Topologie du champ magnétique

Le champ magnétique  $\vec{B}$  a les propriétés d'un vecteur et est tangent aux lignes de champ. On peut déterminer l'équation des lignes de champs en résolvant le système d'équations différentielles résultant de la relation vectorielle (comme en électrostatique) :  $\vec{B} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$

Les lignes de champ sortent du pôle Nord et entrent par le pôle Sud (Figure 2)

L'unité du champ magnétique dans le système MKSA est le Tesla. On utilise aussi d'autres unités telles que le Gauss ou le nanoTesla :  $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}$ ;  $1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ Tesla}$ .

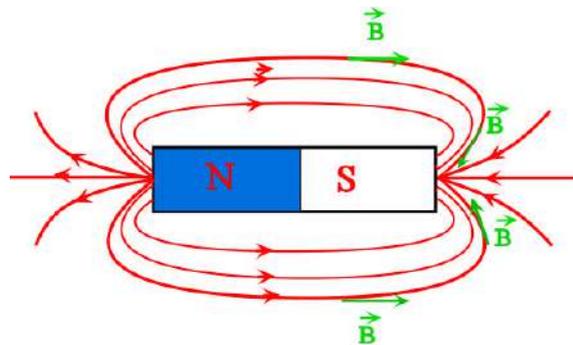


Figure 2. Lignes du champ magnétique

## 2. Les résultats fondamentaux de la magnétostatique

### 2.1. Action d'un champ magnétique sur une particule chargée.

L'étude du mouvement d'une particule chargée  $q$ , animée d'une vitesse  $\vec{V}$ , dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , montre que la trajectoire est un cercle. **Lorentz**, à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, donna la force à laquelle est soumise la particule chargée :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (1)$$

Plus généralement, si en plus du champ magnétique  $\vec{B}$  règne aussi un champ électrostatique  $\vec{E}$ , la force de Lorentz s'exprime par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2)$$

Nouvelle définition du champ magnétique :

Le champ magnétique est la région de l'espace où une particule chargée  $q$  et animée de la vitesse  $\vec{V}$ , se trouve soumise à la force de Lorentz réduite (en l'absence du champ électrique).

### Caractéristiques de la force de Lorentz :

— La direction est perpendiculaire au plan contenant  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$ .

— Le sens est celui du vecteur  $\vec{V} \wedge \vec{B}$ , obtenu par la règle de la main droite, si la charge est positive (Figure 4). Dans le cas d'une charge négative, le sens de la force de Lorentz est le contraire de celui du vecteur  $\vec{V} \wedge \vec{B}$ .

Dans le cas d'une charge positive  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{F}$  forment un trièdre direct.

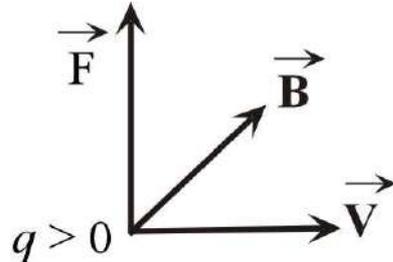


Figure 4. Sens de la force de Lorentz

On utilise aussi la règle du bonhomme d'Ampère pour déterminer le sens de la force de Lorentz, mais on la gardera pour la détermination de la force de Laplace.

— L'intensité de cette force est donnée par :  $F = qVB |\sin(\vec{V}, \vec{B})|$ .

### 2.2. Action d'un champ magnétique sur un conducteur filiforme.

Soit un conducteur parcouru par un courant  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Le conducteur est constitué d'un type de porteurs  $q$  (des électrons dans le cas d'un conducteur métallique) animés d'une vitesse d'ensemble  $\vec{V}$  et il y a  $n$  porteurs par unité de volume du conducteur. Appliquons la formule de Lorentz à un élément  $d\vec{l}$  du conducteur, de volume élémentaire  $d\tau$ .

$$d\vec{F} = nqd\tau(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (3)$$

En introduisant le vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , nous obtenons :

$$d\vec{F} = \vec{j}d\tau \wedge \vec{B} \quad (4)$$

#### Cas d'un conducteur filiforme (diamètre négligeable)

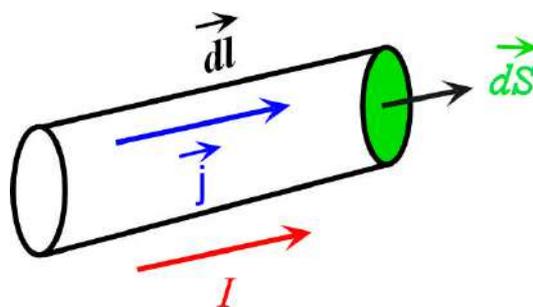


Figure 3. Formule de Laplace : cas d'un conducteur filiforme

$\vec{j}$ ,  $d\vec{S}$ ,  $d\vec{l}$  sont colinéaires. En remarquant que  $d\tau = d\vec{S} \cdot d\vec{l}$  et en remplaçant dans (4) :

$$d\vec{F} = (\vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{l}) \wedge \vec{B} \quad (5)$$

Or  $\vec{j} \cdot d\vec{S} = I$ , par conséquent :

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l}) \wedge \vec{B} \quad (6)$$

C'est la formule de Laplace.

### Caractéristiques de la force de Laplace :

- La force de Laplace est perpendiculaire au plan formé l'élément de courant  $I d\vec{l}$  considéré et le champ magnétique  $\vec{B}$ .
- Le sens de cette force est donné par la règle de la main droite et du bonhomme d'Ampère.

### Règle de la main droite :

Les vecteurs  $I d\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{F}$  forment un trièdre direct : On ramène le vecteur  $I d\vec{l}$  vers le vecteur  $\vec{B}$ , le pouce indiquera alors le sens de  $\vec{F}$  (précaution : le vecteur  $I d\vec{l}$  est en solidaire avec la paume de la main et son sens est dirigé vers le bout des doigts)

### Règle du bonhomme d'Ampère :

Le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant des pieds à la tête, en regardant le vecteur  $\vec{B}$ , a la force à sa gauche (Figure 4).

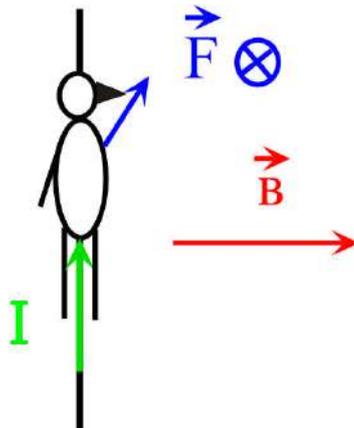


Figure 4. Bonhomme d'Ampère indiquant le sens de la force de Laplace

### 2.3. Action d'un champ magnétique sur un circuit fermé

On considère un circuit rectangulaire de longueur  $BC = l$  et de largeur  $DC = a$ , parcouru par un courant électrique continu d'intensité  $I$  et pouvant tourner autour d'un axe vertical  $zz'$  (Figure 5). Ce circuit est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme faisant un angle  $\theta$  avec la normale au circuit  $\vec{n}$  (les deux vecteurs sont situés dans le plan horizontal).

### Rappel

On appelle moment  $\vec{M}$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée en A, par rapport à un point O, le vecteur donné par :

$$\vec{M}_{F/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F} \quad (7)$$

On s'intéresse aux forces agissant sur ce circuit.

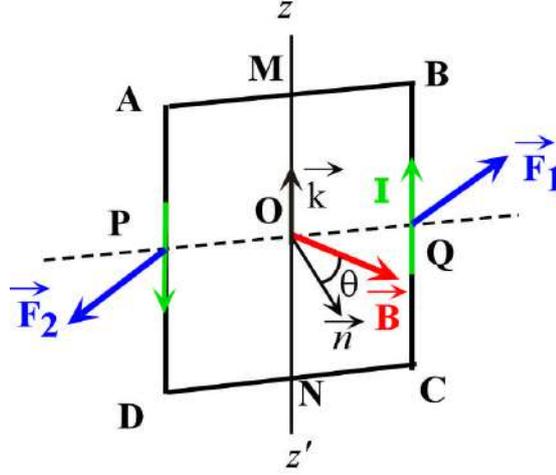


Figure 5. Circuit parcouru par un courant continu et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$   
 Le côté CB est soumis à une force  $\vec{F}_1 = I\vec{CB} \wedge \vec{B}$  appliquée en Q. Le côté AD est soumis lui à la force  $\vec{F}_2 = I\vec{AD} \wedge \vec{B}$ . Ces deux forces sont opposées et égales en intensité : \*

$$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = I l B \quad (8)$$

Les côtés AB et DC sont soumis respectivement aux forces  $\vec{F}_3 = I\vec{BA} \wedge \vec{B}$  et  $\vec{F}_4 = I\vec{DC} \wedge \vec{B}$ . Ces deux forces sont portées par l'axe  $zz'$ , opposées et de même intensité.

La somme de ces 4 forces prises deux à deux est nulle mais leur effet sur le mouvement du circuit n'est pas le même. En effet les forces  $\vec{F}_3$  et  $\vec{F}_4$  n'ont aucun effet sur le circuit car toutes deux sont portées par l'axe  $zz'$ , alors que les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont capables de le mettre en mouvement de rotation car ne sont pas portées par l'axe de rotation. Elles forment un couple.

Examinons maintenant le moment de ces forces prises individuellement.

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{F_1/O} &= \vec{OQ} \wedge \vec{F}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_{F_2/O} &= \vec{OP} \wedge \vec{F}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_{F_3/O} &= \vec{OM} \wedge \vec{F}_3 \\ \vec{\mathcal{M}}_{F_4/O} &= \vec{ON} \wedge \vec{F}_4 \end{aligned}$$

On voit aisément que les moments des forces  $\vec{F}_3$  et  $\vec{F}_4$  sont nuls car  $\vec{F}_3 \parallel \vec{OM}$  et  $\vec{F}_4 \parallel \vec{ON}$

Le moment du couple de force  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  est la somme des moments des forces qui le forment. Nous écrivons :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)_{/O} = \vec{\Gamma} = \vec{OQ} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP} \wedge \vec{F}_2 \quad (9)$$

Or  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , l'expression du moment du couple s'écrira alors :

$$\vec{\Gamma} = \vec{OQ} \wedge \vec{F}_1 - \vec{OP} \wedge \vec{F}_1 = \vec{PQ} \wedge \vec{F}_1 \quad (10)$$

En remplaçant  $\vec{F}_1$  ( $\vec{F}_1 = I\vec{CB} \wedge \vec{B}$ ) Le moment du couple s'écrira :

$$\vec{\Gamma} = \vec{PQ} \wedge \vec{F}_1 = \vec{PQ} \wedge (I\vec{CB} \wedge \vec{B}) \quad (11)$$

En utilisant la règle de calcul du produit vectoriel d'un vecteur par le produit vectoriel de deux autres vecteurs, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{PQ} \wedge (I\vec{CB} \wedge \vec{B}) = I(\vec{PQ} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{CB} - I(\vec{PQ} \cdot \vec{CB}) \cdot \vec{B} \quad (12)$$

$\vec{PQ} \perp \vec{CB}$ , et en écrivant  $\vec{CB} = l\vec{k}$ , l'équation (12) devient :

$$\vec{\Gamma} = Il(\vec{PQ} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{k} = IlPQB \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{k} = Il a B \sin \theta \vec{k} \quad (13)$$

Sachant que  $S = la$ , l'équation (13) devient :

$$\vec{\Gamma} = ISB \sin \theta \vec{k} \quad (14)$$

Introduisons la grandeur  $\vec{M} = IS\vec{n}$ , l'équation (13) donnant le moment du couple sera :

$$\vec{\Gamma} = ISB \sin \theta \vec{k} = IS\vec{n} \wedge \vec{B} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (15)$$

La grandeur  $\vec{M} = IS\vec{n}$  est le **moment magnétique** de la spire et s'exprime (l'unité de mesure) en ampère mètre carré ( $A.m^2$ ). Il traduit la capacité du circuit, parcouru par le courant à créer un couple de forces (à lier aussi avec l'énergie potentielle magnétique). C'est une quantité vectorielle portée par le vecteur normale à la spire.

Dans le cas d'un circuit formé de N spires de surface S, parcouru par un courant continu I, le moment magnétique est donné par :

$$\vec{M} = NIS\vec{n} \quad (16)$$

La direction et sens du moment magnétique sont donnés par le pouce de la main droite en ramenant les autres doigts, orientés dans le sens du courant, vers la paume (Figure 6).

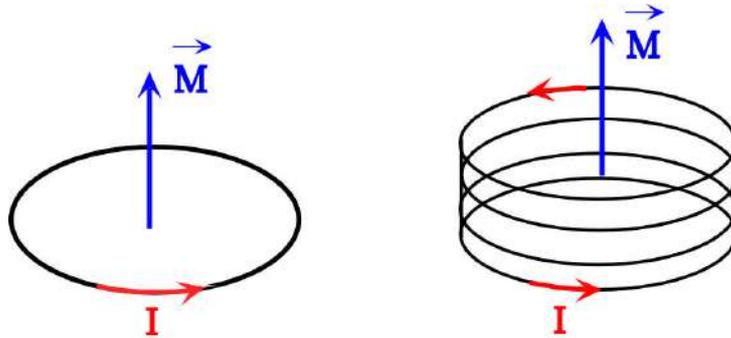


Figure 6. Moment magnétique d'une spire parcourue par un courant I

De même, un aimant est caractérisé par un moment magnétique  $\vec{M}$  orienté du Pôle Sud au Pôle Nord (Figure 7). Placé dans un champ magnétique, l'aiguille aimantée ou le barreau aimanté est soumis au couple donné par :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (17)$$



Figure 7. Moment magnétique d'un barreau aimanté

## 2.4. Champ magnétique créé par un courant

Nous avons vu au paragraphe précédent l'action subie par un conducteur parcouru par un courant électrique et placé dans un champ magnétique. C'est la force de Laplace. Maintenant on va rechercher le champ magnétique engendré par un conducteur parcouru par un courant électrique continu.

### 2.4.1. Loi de Biot et Savart

Soit un circuit fermé de forme quelconque et parcouru par un courant électrique continu. On sait d'après l'expérience d'Oersted que ce conducteur crée un champ magnétique dans l'espace avoisinant. Chaque élément de ce conducteur, centré autour du point P, crée en un point M de l'espace, un champ magnétique élémentaire (Figure 7) donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad (18)$$

C'est la loi de Biot et Savart (physiciens Français).

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide, s'exprime dans le système MKSA en henry par mètre (H/m). Sa valeur dans ce système est :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m

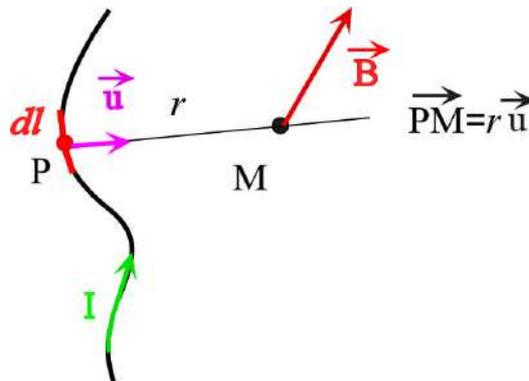


Figure 8. Champ magnétique élémentaire créé par un élément de circuit

Le champ élémentaire est perpendiculaire au plan formé par  $d\vec{l}$  et  $\vec{u}$ .

Dans le cas d'un conducteur rectiligne de longueur infinie et parcouru par un courant électrique d'intensité  $I$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M situé à la distance  $r$  du conducteur présente les caractéristiques suivantes :

→ La direction est celle des tangentes en tous points du cercle centré sur le conducteur. Le cercle constitue naturellement une ligne de champ. On en déduit finalement que les lignes de champs sont des concentriques ayant pour axe le conducteur de longueur infinie.

→ Le sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (Figure 9) : "lorsque celui-ci est traversé des pieds à la tête par le courant, voit au point considéré le champ magnétique à sa gauche", ou la règle des trois doigts de la main droite.

→ L'intensité du champ magnétique est donnée par :  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$

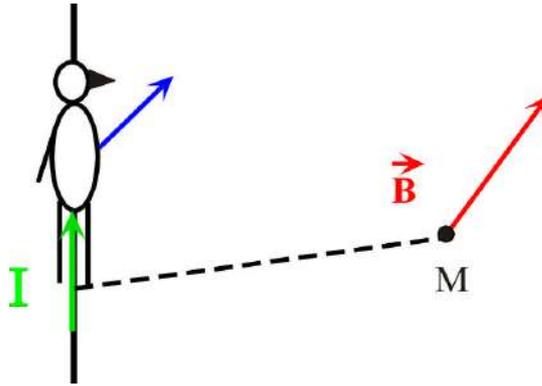


Figure 9. Bonhomme d'Ampère et sens du champ magnétique.

#### 2.4.2. Action mutuelle de deux conducteurs filiformes parallèles parcourus par un courant I

Soient deux conducteurs électriques filiformes rectilignes, parallèles, de longueur infinie et distants l'un de l'autre de  $r$ . On va s'intéresser aux forces que s'exercent mutuellement les 2 conducteurs. Pour cela on va calculer la force exercée par le conducteur (1) sur un élément du conducteur (2) de taille  $MN = l$ . 2 cas se présentent:

→ Les deux courants ont le même sens (Figure 10)

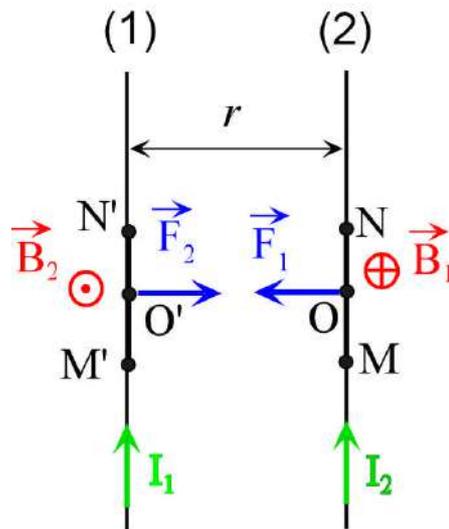


Figure 10. Conducteurs parcourus par deux courants de même sens

Le conducteur parcouru par le courant  $I_1$  crée en O milieu de MN un champ magnétique  $\vec{B}_1$  perpendiculaire au plan et pointant vers l'arrière. Son intensité est donnée par la loi de Biot et Savart, soit :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (19)$$

Ce champ  $\vec{B}_1$  exerce sur le tronçon MN une force  $\vec{F}_1$  (la force de Laplace) dont le sens est donné par la loi du bonhomme d'Ampère ou celle des doigts de la main droite et dont l'intensité est :

$$F_1 = B_1 I_2 l \quad (20)$$

Soit en remplaçant (19) dans (20) :

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 l \quad (21)$$

De façon similaire, le champ magnétique  $\vec{B}_2$  créé en O' par le courant  $I_2$  est donné par :

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} \quad (22)$$

La force de Laplace exercée au milieu du tronçon M'N' par le champ magnétique  $\vec{B}_2$  est donnée par :

$$F_2 = B_2 I_1 l \quad (23)$$

Que l'on peut écrire en portant (22) dans (23) :

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_2 I_1 l \quad (24)$$

L'interaction entre deux conducteurs filiformes parcourus par deux courants de même sens se traduit par une attraction (Les forces sont égales en intensité et de sens opposés).

→ Les deux courants sont de sens opposés (Figure 11)

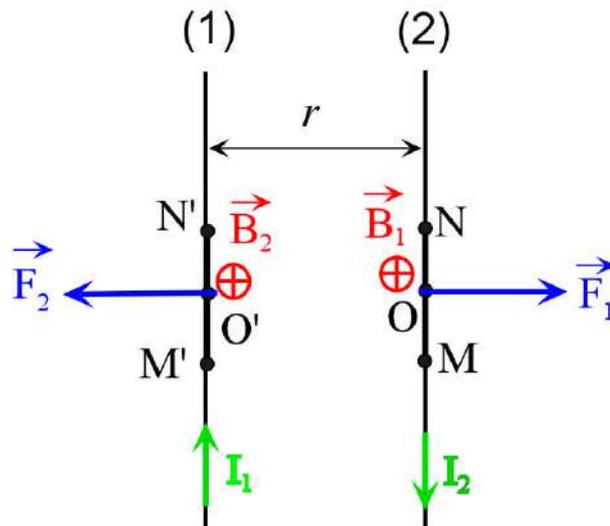


Figure 11. Conducteurs filiformes parcourus par deux courants de sens opposés

Dans ce cas de figure les deux courants engendrent, contrairement au cas précédent, une répulsion (refaire les calculs à titre d'exercice).

### 2.4.3. Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe

Soit une spire circulaire parcourue par un courant électrique continu d'intensité  $I$ . On se propose de calculer le champ magnétique créé par cette spire en un point  $M$  de son axe (Figure 12). On applique la loi de Biot et Savart pour chaque élément de circuit  $\vec{dl}$ . On peut remarquer que les composantes horizontales du champ magnétique s'annulent deux à deux en raison de la symétrie du problème (le module du champ de réduit sa composante suivant l'axe). En poursuivant les calculs on obtient à la fin :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} I \quad (25)$$

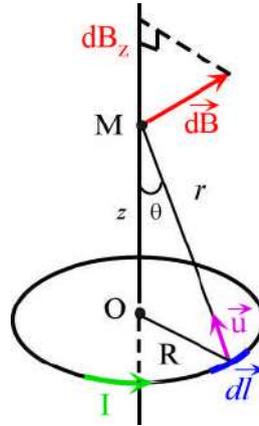


Figure 12. Champ magnétique créé par une spire circulaire en un point de son axe

Si la dimension de la spire est très petite par rapport à la distance  $r$ , on parle alors de dipôle magnétique. L'équation (25) s'écrit alors :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} I \quad (26)$$

Où  $M = \pi R^2$  indique le moment magnétique de la spire

## 2.5. Théorème d'Ampère

### 2.5.1. Vecteur excitation magnétique

Le vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  est défini par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (27)$$

$\mu$  étant la perméabilité magnétique du milieu et  $\vec{B}$  le champ magnétique.

Dans le vide nous avons :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (28)$$

### Remarque :

Dans certains livres, notamment de géophysique, on peut rencontrer des appellations différentes. Ainsi appelle-t-on  $\vec{H}$  champ magnétique et  $\vec{B}$  induction magnétique.

### 2.5.2. Enoncé du théorème d'Ampère.

La circulation du vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$ , le long d'un contour fermé  $C$ , est égale à la somme algébrique des courants se trouvant à l'intérieur du contour  $C$ .

Soit :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_n I_n \quad (29)$$

### 2.5.3. Application du théorème d'Ampère

#### → Cas d'un conducteur filiforme de longueur infinie

Soit un conducteur filiforme rectiligne de longueur infinie et parcouru par un courant électrique continue d'intensité  $I$  (Figure 13). Dans ce cas de figure les lignes de champ sont des cercles concentriques axés sur le fil.

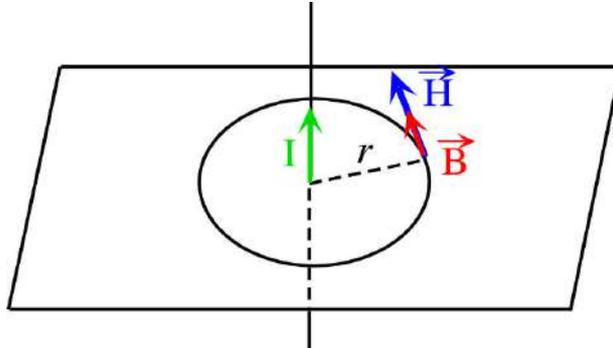


Figure 13. Théorème d'Ampère : cas d'un conducteur filiforme infini

■ Le champ magnétique engendré par le courant traversant le conducteur filiforme peut être calculé directement en utilisant la loi de Biot et Savart et en intégrant. L'intensité du champ

dans ce cas est :  $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$

■ En utilisant le théorème d'Ampère

En effet :

$$\oint_{\text{Cercle}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\text{Cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} B \cdot 2\pi r = I \quad (30)$$

On retrouve le résultat du calcul direct.

Le théorème d'Ampère est en électromagnétisme ce qu'est le théorème de Gauss en électrostatique.

#### → Cas d'un solénoïde de longueur infinie

Un solénoïde est constitué par l'enroulement d'un fil conducteur de manière à ce que chaque tour du fil constitue une spire de rayon  $R$ . Parcouru par un courant électrique continu, le solénoïde devient le siège d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , uniforme dans le cas où le solénoïde est de longueur infinie (Figure 14).

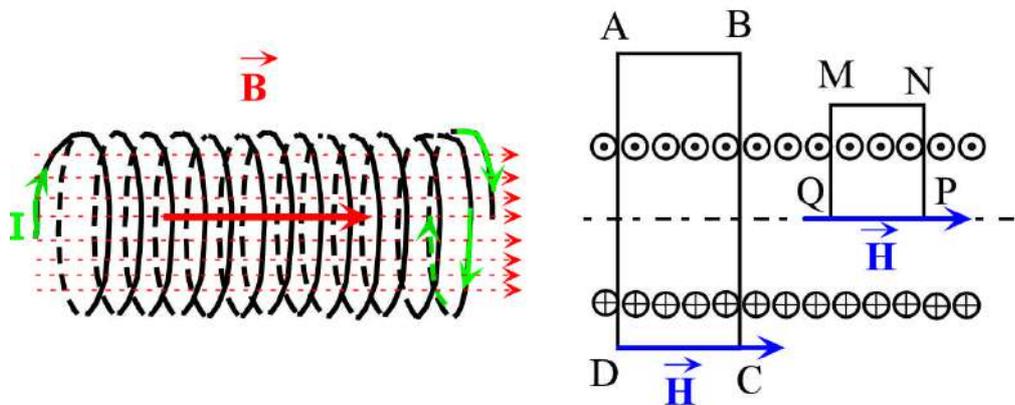


Figure 14. Solénoïde à spires jointives

On se propose de calculer le champ magnétique créé au sein d'un solénoïde à spire jointives et de longueur infinie. Pour ce faire on va utiliser l'outil puissant qu'est le théorème d'Ampère.

■ Calcul de  $\vec{H}$  à l'extérieur du solénoïde

Pour cela on choisit le contour ABCD et on applique le théorème d'Ampère.

$$\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i \Leftrightarrow \vec{H} \cdot \vec{DC} + \vec{H} \cdot \vec{CB} + \vec{H} \cdot \vec{BA} + \vec{H} \cdot \vec{AD} = 0 \quad (31)$$

La circulation de  $\vec{H}$  le long de CB et AD est nulle du fait que l'excitation magnétique est perpendiculaire à ces deux côtés. On retrouve finalement que le vecteur  $\vec{H}$  est le même en tout point de l'espace (un champ uniforme). En supposant le champ magnétique nul à l'infini, donc, aussi le vecteur excitation magnétique, on en déduit, que le vecteur  $\vec{H}$  ainsi que le champ magnétique  $\vec{B}$  sont nuls au dehors du solénoïde.

■ Calcul de  $\vec{H}$  à l'intérieur du solénoïde

On va prendre maintenant le contour QPMN et on applique le théorème d'Ampère.

$$\oint_{MNPQ} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N_s} I_i \Leftrightarrow \vec{H} \cdot \vec{MN} + \vec{H} \cdot \vec{NP} + \vec{H} \cdot \vec{PQ} + \vec{H} \cdot \vec{QM} = N_s I \quad (32)$$

Avec  $N_s$  le nombre de spires à l'intérieur du contour MNPQ.

La circulation de  $\vec{H}$  le long de NP et QM est nulle du fait que l'excitation magnétique est perpendiculaire à ces deux côtés. Elle est aussi nulle le long de MN car le vecteur  $\vec{H}$  est nul à l'extérieur du solénoïde. On retrouve finalement :

$$\vec{H} \cdot \vec{PQ} = N_s I \quad (33)$$

L'excitation à l'intérieur du solénoïde est égale à :

$$H = \frac{N_s}{PQ} I = nI \quad (34)$$

Avec  $n$  le nombre de spire par unité de longueur de solénoïde. Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est par conséquent égal à

$$B = \mu_0 nI \quad (35)$$

## 2.6. Flux magnétique

Le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface S, est donné par :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (36)$$

L'unité du flux magnétique dans le système MKSA est le weber (Wb). Le champ magnétique dont l'unité est le Tesla (T) s'exprime aussi en weber/m<sup>2</sup>.

Un résultat très important :

Le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul.

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (37)$$

### 3. Le Géomagnétisme

Le géomagnétisme se propose d'étudier le champ magnétique terrestre. Dans cette optique, trois grandes thématiques peuvent être distinguées :

■ En physique du globe, l'étude du champ magnétique terrestre sur des périodes temporelles très importantes permet de préciser les composantes externes du champ magnétique (magnétosphère et ionosphère) et les composantes internes (circulation dans le noyau terrestre, composantes mantellique et lithosphérique).

■ En géodynamique, où l'étude des variations du champ magnétique au fil des temps géologiques (le paléomagnétisme) permet de reconstituer les mouvements des plaques. Un autre aspect abordé aussi est la reconstitution de l'histoire magnétique à l'échelle humaine (l'archéomagnétisme).

■ En prospection géophysique, où l'objectif est l'étude des anomalies magnétique et leur interprétation à une échelle plus restreinte.

#### 3.1. Grandeurs physiques et unités

En géomagnétisme on utilise une terminologie légèrement différente. Par exemple, on parle du **vecteur champ de force magnétique** pour désigner le vecteur excitation magnétique,  $\vec{H}$ , de l'équation  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , alors que le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  est appelé **vecteur induction magnétique**.

##### *Les unités*

Dans le **système International** :

→ Le champ  $\vec{H}$  s'exprime en Ampère par mètre ( $A.m^{-1}$ ). Pour savoir pourquoi se référer à l'énoncé du théorème d'Ampère, éq : 29.

→ Le champ magnétique  $\vec{B}$  s'exprime en Tesla (une unité très grande on lui préfère le nano Tesla ( $1 \text{ nanoTesla} = 10^{-9} \text{ Tesla}$ ) ou en volt-seconde par mètre carré ( $V.s.m^{-2}$ ). Pour s'en rendre compte on se réfère à l'expression de la loi de Biot et Savart, éq :18, à l'équation de dimension de la self-induction et à l'unité de la perméabilité magnétique. Le champ magnétique s'exprime aussi en Weber par mètre carré ( $Wb.m^{-2}$ ). Pour cela voir l'expression du flux magnétique, éq :37. La dernière unité permet de voir que le champ magnétique est en fait une densité du flux magnétique.

→ La perméabilité magnétique  $\mu$  s'exprime en Henry par mètre ( $H.m^{-1}$ ) ou en Ohm-seconde par mètre ( $\Omega.s.m^{-1}$ ). On raisonnera de la même façon que précédemment. La perméabilité magnétique du vide est  $\mu_0$ . On assimile la perméabilité absolue de l'air à celle du vide. La valeur de la perméabilité magnétique du vide est égale à  $4\pi.10^{-7} H.m^{-1} = 4\pi.10^{-7} \Omega.s.m^{-1}$

→ La perméabilité relative dans un milieu autre que le vide est donnée par :  $\mu = \mu_r \mu_0$ . En reprenant la relation reliant le champ magnétique au vecteur excitation magnétique on peut mettre en évidence l'existence d'un paramètre sans dimension très important en prospection géomagnétique : **la susceptibilité magnétique** notée  $\chi_m$ . En effet :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 (\mu_r - 1) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (38)$$

Soit :

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (39)$$

Dans le vide  $\mu_r = 1$  et  $\chi_m = 0$ .

La susceptibilité magnétique peut être négative.

**Interprétation :**

L'équation (38), nous renseigne que, dans un milieu autre que le vide, le champ magnétique créé en un point est la somme de deux composante :

- Une première composante  $\mu_0 \vec{H}$ , correspondant au champ magnétique créé dans le vide.
- Une deuxième composante  $\mu_0 \chi_m \vec{H}$ , qui correspondant au surplus magnétique dû à la susceptibilité magnétique du milieu.

C'est cette deuxième composante à laquelle on s'intéresse en magnétométrie. En effet les variations de la susceptibilité magnétique renseignent sur les anomalies recherchées, telles que celles des minéralisations ou des structures géologiques.

**Remarque :**

C'est la présence d'un champ de force magnétique (excitation) inducteur qui est à l'origine d'un champ magnétique induit. En géomagnétique, le champ de force magnétique inducteur ou le champ magnétique inducteur est celui de la terre. Le champ magnétique induit est celui créé grâce à la présence de matériaux doués d'une susceptibilité magnétique (ce qu'on cherche).

➔ Intensité de magnétisation (ou d'aimantation)

L'intensité de magnétisation est une grandeur vectorielle définie par :

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H} \quad (40)$$

Le vecteur intensité de magnétisation (d'aimantation) est porté par le vecteur champ de force magnétique et à la même unité que celui-ci ( $A.m^{-1}$ ) (la susceptibilité magnétique étant adimensionnelle).

La projection de l'équation (38) sur les axes de coordonnées, et en tenant compte de l'équation (40) donnera :

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_0 (H_x + J_x) \\ B_y &= \mu_0 (H_y + J_y) \\ B_z &= \mu_0 (H_z + J_z) \end{aligned} \quad (41)$$

➔ Moment magnétique

Le moment magnétique d'un corps de volume  $V$ , aimanté uniformément est donné par :

$$\vec{M} = V \cdot \vec{J} \quad (42)$$

Le moment magnétique a la même direction que le vecteur champ de force magnétique  $\vec{H}$ , au même titre que le vecteur intensité de magnétisation. Son sens est dirigé du pôle Nord au pôle Sud. L'unité du moment magnétique est l'Ampère par mètre carré ( $A / m^2$ ).

3.2. Cycle d'hystérésis

Nous avons supposé que la relation liant le champ d'induction magnétique au champ de force magnétique est linéaire. L'étude de la relation liant ces deux champs révèle, en fait, un comportement complexe dans le cas des matériaux ferromagnétiques.

### L'expérience

On considère un solénoïde parcouru par un courant électrique continu et à l'intérieur duquel on place un barreau de fer. Le passage du courant électrique dans la bobine crée un champ magnétique ressenti par la déviation d'une aiguille magnétique. Cette déviation est plus prononcée lorsqu'on introduit un barreau de fer à l'intérieur du solénoïde. L'expérience consiste à suivre la variation du champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  au sein du barreau de Fer, initialement désaimanté, en fonction du champ de force magnétique  $\vec{H}$  qui à son tour, varie en fonction de l'intensité du courant électrique. En représentant graphiquement ces variations on obtient la courbe d'hystérésis (Figure 14).

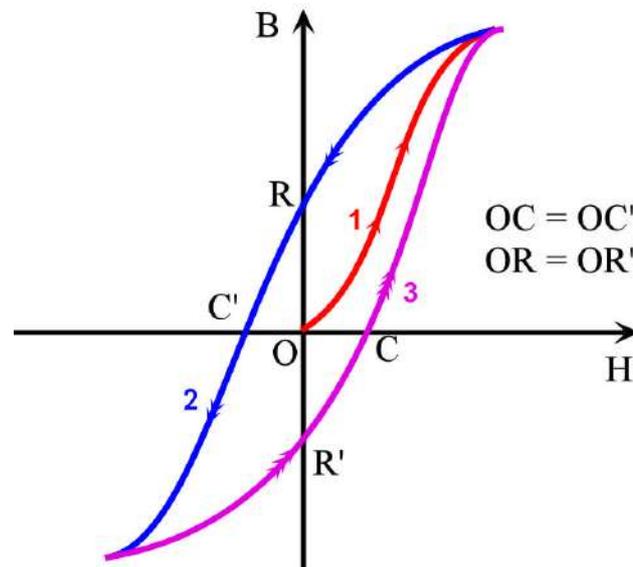


Figure 14. Courbe d'hystérésis

Dans la première partie de la courbe, le chemin (1), on peut voir que  $B$  augmente avec  $H$  jusqu'à une certaine limite où la courbe commence à s'aplanir par suite de la saturation. Si l'on fait décroître  $H$ , le champ magnétique décroît en suivant le chemin (2). On observe aussi qu'en l'absence de tout champ extérieur  $H$ , le champ d'induction magnétique garde une valeur non nulle. Le barreau de Fer, initialement désaimanté, a donc acquis une aimantation propre : c'est l'aimantation rémanente (le point R).

Si on inverse le champ  $H$  (en inversant le sens du courant), on peut voir que le champ magnétique s'annule pour une certaine valeur négative de  $H$  que l'on appelle champ coercitif (le point C'). En continuant d'augmenter le champ  $H$  (en valeur absolue, en empruntant le chemin 2), le champ  $B$  croît jusqu'à une autre limite, lorsque la saturation est atteinte. En diminuant progressivement le champ extérieur  $H$ , le champ magnétique décroît mais en évoluant suivant le chemin (3) de la courbe. En continuant jusqu'au point R', on peut voir, là aussi, que le barreau de Fer garde une aimantation en l'absence du champ de force magnétique extérieur (l'aimantation rémanente). En inversant, encore une fois, le champ

extérieur  $H$ , le champ d'induction magnétique  $B$  s'annule pour une certaine valeur de  $H$  (le champ coercitif correspondant au point C).

Les valeurs de  $H$  aux points C et C' correspondent au champ coercitif qu'il faut appliquer à l'échantillon pour l'élimination de l'aimantation rémanente acquise en R et R'.

### 3.3. Repères et éléments du champ magnétique

La description du champ géomagnétique se fait en utilisant deux types de repères : le repère géocentrique et le repère local.

■ Le repère géocentrique est un repère sphérique, dont l'origine est située au centre de la terre. Dans ce repère chaque point est défini par une distance (la distance du point considéré à l'origine) et deux angles : la longitude et la latitude (voir chapitre 1).

■ Le repère local est un repère cartésien centré sur le point P où l'on veut définir le champ géomagnétique. Par convention, ce repère  $(O, x, y, z)$  est défini de la manière suivante :

- L'axe horizontal des  $x$  est dirigé vers le Nord géographique
- L'axe horizontal des  $y$  est dirigé vers l'Est
- L'axe vertical des  $z$  est dirigé vers le bas (le centre de la terre)

Les éléments du champ géomagnétique

→ Les éléments du champ géomagnétique

Dans le repère local, le champ magnétique est décrit par ses composantes sur les axes de coordonnées et aussi par la donnée de deux mesures angulaires (Figure 15) :

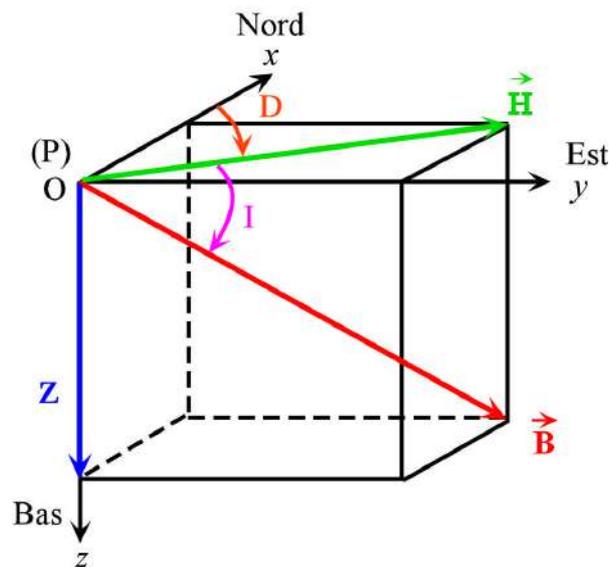


Figure 15. Description du champ magnétique dans un repère local

—  $\vec{B}$  est le vecteur champ magnétique de module  $B$ , exprimé en Tesla (T), mais fréquemment en nano-Tesla (nT)

—  $\vec{H}$  est la projection du vecteur  $B$  sur le plan horizontal  $(x, y)$ . C'est la composante horizontale du champ magnétique et s'exprime aussi en nT

— L'angle  $D$  indique la déclinaison magnétique. Celle-ci représente la mesure de l'angle que fait la composante horizontale du champ magnétique avec le Nord géographique dans le

plan horizontal :  $D = \widehat{(\vec{Ox}, \vec{H})}$ . Par convention, cet angle est compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre et négativement dans l'autre sens. Si le champ magnétique pointe vers l'Est, alors  $D = 90^\circ$ . Si le champ magnétique pointe vers l'Ouest alors  $D = -90^\circ$ , ou  $D = 270^\circ$ . Lorsque le champ magnétique pointe vers le Sud, la déclinaison vaudra  $D = 180^\circ$ , ou  $D = -180^\circ$ . Lorsque le champ pointe vers le Nord alors  $D = 0^\circ$ .

— L'angle  $I$  indique l'inclinaison magnétique. Celle-ci exprime la mesure de l'angle de la composante horizontale du champ magnétique et le vecteur champ magnétique :  $I = \widehat{(\vec{H}, \vec{B})}$ . Par convention, l'inclinaison est comptée positivement vers le bas et négativement vers le haut. Si le champ magnétique est horizontal, alors  $I = 0^\circ$ . Dans l'hémisphère Nord l'inclinaison du champ magnétique terrestre est positive, tandis qu'elle est négative dans l'hémisphère Sud.

Les relations entre toutes ces grandeurs et donnant les composantes cartésiennes du champ magnétique terrestre s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X = B_x &= H \cdot \cos D = B \cdot \cos D \cdot \cos I \\ Y = B_y &= H \cdot \sin D = B \cdot \sin D \cdot \cos I \\ Z = B_z &= B \cdot \sin I \end{aligned} \quad (43)$$

### 3.4. Nature et variabilité du champ magnétique terrestre

#### 3.4.1. Hypothèses et Constations

Le champ magnétique terrestre se compose de 3 parties :

- ➔ Le champ principal d'origine interne, revêtant le caractère d'une aimantation permanente, et imputée aux courants électriques circulant dans le noyau externe (la partie du noyau dont les rayons sont compris entre 1300 Km et 3500 Km). On pense également que la source magnétique est de type dynamo auto-excitée, dans laquelle un fluide de haute conductibilité, provenant de variations chimiques ou thermiques, circule avec un mouvement mécanique complexe. L'association du courant et du mouvement crée le champ magnétique.
- ➔ Le champ externe, très petit devant le champ principal (1% environ du champ géomagnétique) a par contre une origine située hors de la Terre. L'origine est en effet associée à des courants électriques situés dans les couches ionisées de la haute atmosphère.
- ➔ Les anomalies magnétiques locales qui sont des variations du champ principal, souvent plus petites que celui-ci, trouvent leur origine dans les variations de la teneur en minéraux magnétiques des roches de la croûte terrestre au voisinage de la surface.

#### 3.4.2. Variabilité du champ magnétique terrestre

Le champ magnétique est loin d'être constant, du fait de la variation même des composantes de ce champ que nous avons énumérées précédemment.

##### ➔ Variations du champ principal (permanent)

Ce sont les variations séculaires. En effet, des enregistrements des différents éléments du champ magnétique, notamment la déclinaison et l'inclinaison, faits aux observatoires de Londres et de Paris depuis 1580, laissent apparaître une variation de  $10^\circ$  de l'inclinaison (de  $75^\circ$  à  $65^\circ$ ) et une variation de la déclinaison de  $35^\circ$  (de  $10^\circ\text{E}$  à  $25^\circ\text{E}$ , puis  $10^\circ\text{W}$ ) de cette époque à nos jours. La variation de la déclinaison semble être cyclique comme si les pôles magnétiques sont animés d'un mouvement de rotation autour de l'axe N-S des pôles

géographiques. Cependant des enregistrements faits dans d'autres localités sont complètement différents. Dans tous les cas on pense que l'origine de ces variations est liée à des modifications dans les courants de convection du noyau, dans le couplage noyau-manteau et dans la rotation de la Terre.

#### → Variations du champ magnétique externe

Ces variations sont beaucoup plus rapides que celles du champ magnétique principal. On observe à cet effet :

— Un cycle de 11 ans en liaison avec l'activité des tâches solaires

— Une variation diurne solaire, d'une période de 24 heures et de 30 nT d'amplitude. Cette variation change avec la latitude et les saisons et semble associée aux interactions soleil-ionosphère.

— Une variation diurne lunaire, d'une période de 25 jours et de 2 nT d'amplitude. Cette variation change de façon cyclique au cours du mois et probablement liée à l'interaction lune-ionosphère.

— Les orages magnétiques qui sont des perturbations magnétiques transitoires dont l'amplitude peut atteindre 1000 nT indépendamment de la latitude. Ces variations sont aussi périodiques et surviennent tous les 27 jours. Pendant les orages magnétiques qui peuvent durer plusieurs jours, les communications radio par ondes longues sont très perturbées et la prospection magnétique impossible.

→ Les variations du champ magnétique principal (anomalies magnétiques) dues aux teneurs en matériaux magnétiques sont relativement constantes dans le temps. Ces anomalies constituent des indicateurs recherchés en prospection magnétique.

Excepté les orages magnétiques, les autres variations du champ magnétique n'ont pas une signification importante sur la prospection magnétique. Les variations de latitude (4–5 nT/Km) ne nécessitent pas de correction sur le terrain sauf quand il s'agit d'une grande étendue.

### 3.5. Magnétisme des roches et des minéraux

La présence d'un champ magnétique externe (le champ magnétique terrestre) induit la création d'un champ magnétique induit dont l'intensité dépend de la perméabilité magnétique,  $\mu$ , du milieu (équation 38). De cette équation on peut aussi voir que le surplus de champ magnétique est fonction d'une autre propriété physique du milieu (ou du matériau dont est constitué le milieu), à savoir, la susceptibilité magnétique  $\chi_m$ . Le surplus affectant le champ magnétique induit (l'anomalie magnétique recherchée) peut être important ou pas, en fonction de la valeur de la susceptibilité magnétique.

D'un autre côté la susceptibilité magnétique conditionne le type d'aimantation induite, donc le comportement magnétique du matériau formant le milieu où est mesuré le champ magnétique induit (équation 40). On doit, en toute logique, s'attendre à des comportements magnétiques différents selon que la susceptibilité magnétique est positive ou négative. En effet, on distingue différents types de comportements magnétiques des matériaux selon le signe et la valeur de la susceptibilité magnétique.

#### 3.5.1. Principaux types de magnétisme

→ Le diamagnétisme

Un matériau est diamagnétique lorsque sa susceptibilité magnétique est négative. L'intensité de magnétisation est de sens opposé au champ inducteur (équation 40). La plupart des corps solides, liquides et gazeux sont diamagnétiques : l'eau, l'air, la silice, la calcite, le graphite, le gypse, le marbre, le sel...

#### → Le paramagnétisme

Par définition, les matériaux qui ne sont pas diamagnétiques sont dits paramagnétiques et correspondent donc à des valeurs positives de la susceptibilité magnétique. L'intensité de magnétisation est de même sens que le champ inducteur (équation 40). Néanmoins cette aimantation est faible et diminue avec la température. Elle disparaît complètement quand le champ inducteur cesse de régner.

#### → Le ferromagnétisme

Cette magnétisation est beaucoup plus forte que dans les cas du diamagnétisme et du paramagnétisme et elle continue même en l'absence du champ magnétique inducteur. On parle alors de rémanence (Figure 14). L'aimantation là aussi diminue avec la température et disparaît totalement au-delà d'une certaine température dite température de Curie (ou point de Curie). Les corps ferromagnétiques sont le fer, les aciers, la magnétite, l'hématite, la titanomagnétite, les sulfures et l'hydroxyde de fer. La température de Curie du fer est 770°C, celle de la magnétite est de 850°C et celle de l'hématite 675°C. Ce sont les minéraux magnétiques tels que les titanomagnétites ( $\text{Fe}_3\text{O}_4\text{-Fe}_2\text{TiO}_4$ ) et les titanilménites ( $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{-FeTiO}_3$ ) qui sont responsables de l'aimantation des roches. Les anomalies magnétiques sont dues à la quantité de minéraux magnétiques présents dans les roches.

### 3.5.2. Principaux types d'aimantation rémanente

Lorsqu'une roche ou un matériau artificiel acquièrent une aimantation, celle-ci est parallèle à la direction du champ magnétique ambiant au moment de leur formation. Ces matériaux constituent donc une mémoire du champ magnétique et jouent un rôle similaire à celui des fossiles et peuvent de ce fait servir à la datation des roches effusives, bien sûr, et aussi des roches sédimentaire. Selon la genèse de ces roches on distingue plusieurs types d'aimantation rémanente.

#### → Aimantation thermorémanente (ATR)

Cette aimantation se produit lorsque le matériau magnétique est refroidi à partir du point de Curie, en présence d'un champ magnétique externe. C'est le cas des roches volcaniques en présence du champ magnétique terrestre. La rémanence acquise de cette façon est typiquement stable. Dans quelques cas, elle peut être opposée au champ magnétique inducteur.

#### → Aimantation rémanente détritique (ARD)

Elle se produit lors du dépôt lent de particules de très petite taille, en présence d'un champ magnétique extérieur. Ce type de rémanence se rencontre dans les argiles.

#### → Aimantation rémanente chimique (ARC)

Elle est liée au phénomène de la diagénèse au cours duquel des minéraux magnétiques apparaissent et garderont l'aimantation du champ magnétique ambiant (champ magnétique terrestre).

#### → Aimantation rémanente isotherme chimique (ARI)

Cette aimantation est liée à la foudre . On assiste en effet à l'application d'un champ magnétique très fort, engendré par les éclairs, pendant un laps de temps et à une température quasi constante, contrairement à l'ATR. Cette aimantation est plus faible que l'ATR. L'ARI est instable et diminue proportionnellement au logarithme du temps.

### 3.5.3. Susceptibilité magnétique des minéraux et des roches

La susceptibilité magnétique est le paramètre primordial en magnétisme. Elle joue en magnétométrie le rôle que joue la densité en gravimétrie. La susceptibilité magnétique n'est pas constante pour une même substance magnétique donnée. Elle varie, en effet, en fonction de l'intensité du champ de force magnétique  $H$  : elle augmente quand celle-ci augmente, sans pour autant dépasser une valeur maximale.

Les minéraux magnétiques (la magnétite particulièrement) sont les principales causes des anomalies magnétiques locales, c'est pourquoi des recherches ont été faites pour tenter de relier la valeur de la susceptibilité magnétique à la concentration en magnétite sans grand succès à cause de la grande dispersion des valeurs et de l'hétérogénéité des résultats. Une liste des valeurs de la susceptibilité magnétique pour différentes roches et substances minérales est consignée dans le Tableau 1.

Tableau 1. Susceptibilité des roches et des minéraux (Telford et al, 1990)

Table 3.1. *Magnetic susceptibilities of various rocks and minerals.*

Type	Susceptibility $\times 10^3$ (SI)	
	Range	Average
<i>Sedimentary</i>		
Dolomite	0 – 0.9	0.1
Limestones	0 – 3	0.3
Sandstones	0 – 20	0.4
Shales	0.01 – 15	0.6
Av. 48 sedimentary	0 – 18	0.9
<i>Metamorphic</i>		
Amphibolite		0.7
Schist	0.3 – 3	1.4
Phyllite		1.5
Gneiss	0.1 – 25	
Quartzite		4
Serpentine	3 – 17	
Slate	0 – 35	6
Av. 61 metamorphic	0 – 70	4.2
<i>Igneous</i>		
Granite	0 – 50	2.5
Rhyolite	0.2 – 35	
Diorite	1 – 35	17
Augite-syenite	30 – 40	
Olivine-diabase		25
Diabase	1 – 160	55
Porphyry	0.3 – 200	60
Gabbro	1 – 90	70
Basalts	0.2 – 175	70
Diorite	0.6 – 120	85
Pyroxenite		125
Peridotite	90 – 200	150
Andesite		160
Av. acidic igneous	0 – 80	8
Av. basic igneous	0.5 – 97	25
<i>Minerals</i>		
Graphite		0.1
Quartz		–0.01
Rock salt		–0.01
Anhydrite, gypsum		–0.01
Calcite	–0.001 – – 0.01	
Coal		0.02
Clays		0.2
Chalcopyrite		0.4
Sphalerite		0.7
Cassiterite		0.9
Siderite	1 – 4	
Pyrite	0.05 – 5	1.5
Limonite		2.5
Arsenopyrite		3
Hematite	0.5 – 35	6.5
Chromite	3 – 110	7
Franklinite		430
Pyrrhotite	1 – 6000	1500
Ilmenite	300 – 3500	1800
Magnetite	1200 – 19200	6000

### 3.6. Modélisation du champ magnétique terrestre

#### 3.6.1. Potentiel magnétique

Le champ magnétique dérive d'un potentiel. En dehors de sources locales de champ, entre la surface de la Terre et l'ionosphère, le potentiel géomagnétique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
V(r, \theta, \phi) = & a \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cdot \cos m\phi + h_n^m \cdot \sin m\phi) \cdot P_n^m(\theta) \\
& + a \sum_{n'=1}^{n'_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n'+1} \sum_{m'=0}^{n'} (q_{n'}^{m'} \cdot \cos m'\phi + s_{n'}^{m'} \cdot \sin m'\phi) \cdot P_{n'}^{m'}(\theta)
\end{aligned} \tag{44}$$

$(r, \theta, \phi)$  : Coordonnées géocentriques (avec l'origine fixée au centre de la terre) et  $0 \leq \theta \leq 180$  étant la colatitude) ;

$n$  (resp.  $n'$ ) : degré du développement pour le champ d'origine interne (resp. le champ externe)

$m$  (resp.  $m'$ ) : ordre du développement pour le champ d'origine interne (resp. le champ externe)

$a$  : le rayon moyen de la Terre.

$P_n^m(\theta), P_{n'}^{m'}(\theta)$  : Polynômes associés de Legendre.

$g_n^m, h_n^m, q_{n'}^{m'}, s_{n'}^{m'}$  : Coefficients de Gauss, en nT

La première partie indique le potentiel du au champ d'origine interne, tandis que la deuxième indique celui du au champ d'origine externe.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'au potentiel d'origine interne, c'est-à-dire le potentiel correspondant au champ principal. Le champ B s'exprime alors par :

$$\vec{B} = -\text{grad}V(r, \theta, \phi) \tag{45}$$

Et ses composantes (X, Y, Z) en tout point  $P(r, \theta, \phi)$  sont données par :

$$\vec{B} = -\nabla V(r, \theta, \phi) \begin{cases} X = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\ Y = -\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ Z = \frac{\partial V}{\partial r} \end{cases} \tag{46}$$

Les coefficients de Gauss  $(g_n^m, h_n^m)$  sont calculés en résolvant le problème inverse et en comparant avec les données du champ mesurées dans les observatoires et par satellite, jusqu'à trouver les valeurs requises avec la précision voulue. Le champ magnétique ainsi trouvé est adopté tous les cinq ans par la communauté internationale sous le nom de Champ magnétique international de référence (IGRF, *International Geomagnetic Reference Field*). Les séries de coefficients  $(g_n^m, h_n^m)$  constituant l'IGRF sont disponibles tous les 5 ans jusqu'au degré 13 depuis l'an 2000. Le tableau 2 ci-dessous présente une partie des coefficients de l'IGRF 2010 avec la prédiction de leur variation en fonction du temps  $\dot{g}_n^m, \dot{h}_n^m$  en nT/an.

Tableau 2. Coefficients de l'IGRF 2010

n	m	$g_n^m$ (nT)	$h_n^m$ (nT)	$\dot{g}_n^m$ nT/an	$\dot{h}_n^m$ nT/an
1	0	-29496.5	-	11.4	-
1	1	-1585.9	4945.1	16.7	-28.8
2	0	-2396.6	-	-11.3	-
2	1	3026.0	-2707.1	-3.9	-23.0
2	2	1668.6	-575.4	2.7	-12.0
3	0	1339.7	-	1.3	-
3	1	-2305.8	-160.5	-3.9	8.6
3	2	1231.7	251.7	-2.9	-2.9
3	3	634.2	-536.8	-8.1	-2.1
4	0	912.6	-	-1.4	-
4	1	809.0	286.4	2.0	0.4
4	2	166.6	-211.2	-8.9	3.2
4	3	-357.1	164.4	4.4	3.6
4	4	89.7	-309.2	-2.3	-0.8
.	.	.	.	.	.
8	0	24.3	-	-0.1	-
.	.	.	.	.	.
10	0	-2.0	-	0.0	-
.	.	.	.	.	.
13	11	0.4	-0.2	0.0	0.0
13	12	-0.3	-0.5	0.0	0.0
13	13	-0.3	-0.8	0.0	0.0

### 3.6.2. Distribution du champ magnétique interne (principal)

Après avoir déterminé les coefficients figurant dans l'expression de l'équation donnant le potentiel (44), on peut se fier aux équations donnant les composantes du champ magnétique terrestre calculé (45, 46) pour représenter le champ magnétique terrestre tel qu'il est observé (mesuré) dans les observatoires.

Les observations du champ magnétique terrestre peuvent être résumées comme suit :

#### ■ L'inclinaison

On constate que celle-ci est horizontale ( $I = 0^\circ$ ) suivant une ligne sensiblement parallèle à l'équateur géographique, définissant ainsi l'équateur magnétique. On constate aussi que l'inclinaison augmente en **valeur absolue** vers le Nord et vers le Sud jusqu'à des valeurs avoisinant  $\pm 80^\circ$  (Figure 16).

#### ■ L'intensité du champ total

Les variations de l'intensité du champ magnétique total sont moins régulières que celles de l'inclinaison. Cela dit on peut voir que l'intensité du champ magnétique est comprise dans une fourchette de 20 à 40000 nT en zone équatoriale, alors qu'elle peut dépasser les 60000 nT dans les zones polaires. Le champ magnétique est donc deux fois plus intense aux pôles qu'en zone équatoriale (Figure 17).

#### ■ La déclinaison

Les contours de la déclinaison montre un aspect plus complexe. On peut cependant constater que dans une fourchette de latitudes comprise entre  $60^\circ\text{S}$  et  $60^\circ\text{N}$ , la déclinaison est comprise entre  $-20^\circ\text{W}$  et  $20^\circ\text{E}$ , alors qu'elle devient très importante et dispersée au voisinage des pôles (Figure 18).

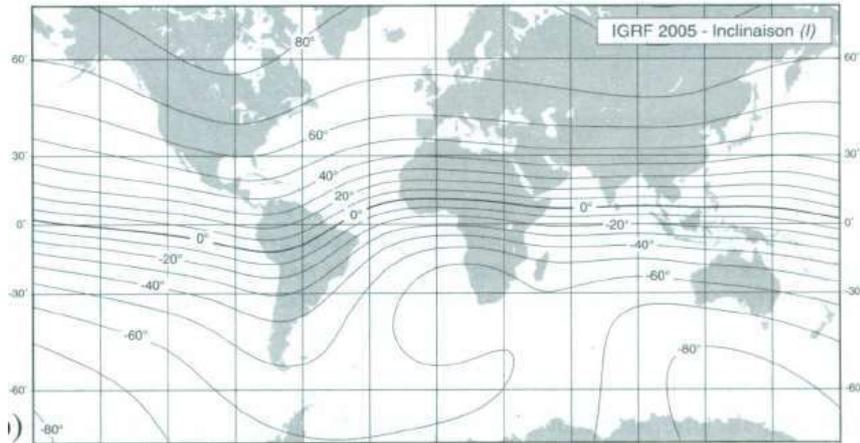


Figure 16. Carte des contours de l'inclinaison du champ magnétique terrestre.

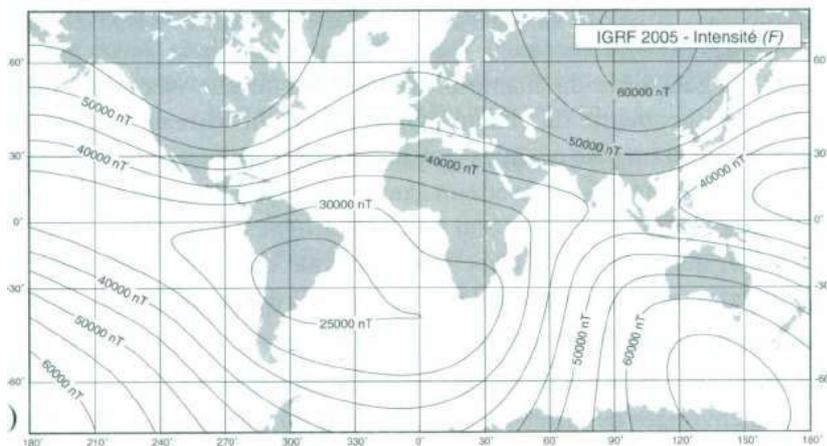


Figure 17. Carte des contours de l'intensité du champ magnétique total.

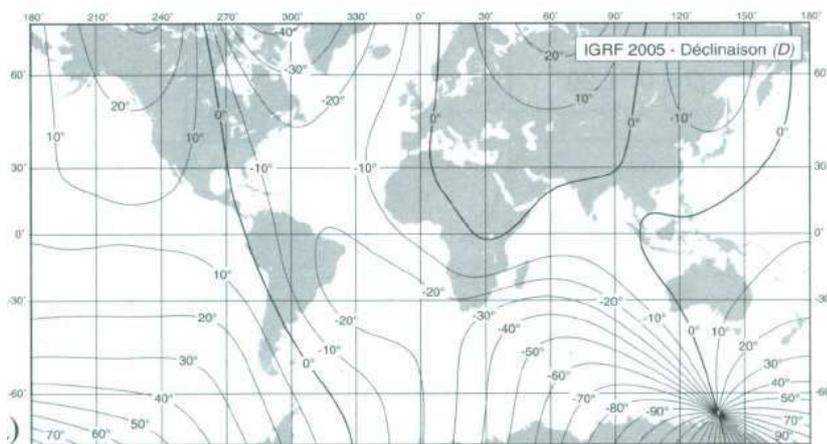


Figure 18. Carte des contours de la déclinaison du champ magnétique terrestre

### 3.6.3. Modèles géométriques du champ magnétique terrestre

Des variations de la déclinaison, de l'inclinaison et de l'intensité du champ magnétique terrestre, on peut penser que celui-ci présente une géométrie similaire à celle du champ

magnétique d'un barreau aimanté avec ses deux pôles Nord et Sud, c'est-à-dire un dipôle magnétique, situé au centre de la Terre et plus ou moins aligné avec son axe de rotation.

On va présenter dans la suite deux modèles simplifiés du dipôle magnétique terrestre.

➔ Le dipôle axial centré

Le modèle magnétique dans ce cas représente un barreau aimanté situé au centre de la Terre et confondu avec son axe de rotation (Figure 19).

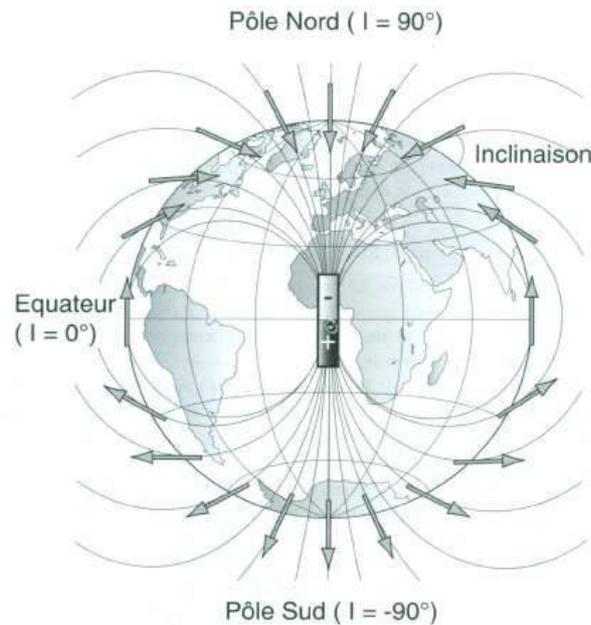


Figure 19. Dipôle axial centré

Ce modèle correspond au développement de degré  $n = 1$  et d'ordre  $m = 0$  de l'expression du potentiel magnétique donné par l'équation (44). Le polynôme de Legendre correspondant étant  $p_1^0(\theta) = 1$ . Le potentiel du dipôle axial centré s'écrit :

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{a^3}{r^2} g_1^0 \cdot \cos \theta \quad (47)$$

Le champ magnétique terrestre est donné par :

$$\vec{B} = -\nabla V(r, \theta, \phi) \begin{cases} X = -\frac{a^3}{r^3} g_1^0 \sin \theta \\ Y = 0 \\ Z = -2 \frac{a^3}{r^3} g_1^0 \cos \theta \end{cases} \quad (48)$$

Avec ce modèle on peut voir que :

- Le champ magnétique pointe vers le Nord géographique avec une déclinaison nulle sur toute la surface du globe.
- Le champ est horizontal ( $I = 0^\circ$ ) à l'équateur, pointe vers le bas ( $I > 0^\circ$ ) dans l'hémisphère Nord, et vers le haut  $I < 0^\circ$  dans l'hémisphère Sud. Dans ce modèle les pôles géographiques et magnétiques (Nord et Sud, respectivement) sont confondus.
- L'intensité du champ magnétique est deux fois plus grande aux pôles qu'à l'équateur.

Malgré les simplifications induites, ce modèle reflète 90% de la morphologie du champ magnétique terrestre.

→ Le dipôle centré

En adoptant le développement de degré  $n=1$  de d'ordre  $m=1$  de l'expression du potentiel géomagnétique (44), on obtient une meilleure approximation du champ magnétique terrestre. Dans ce cas de figure les polynômes de Legendre correspondant sont  $p_1^0(\theta)=1$  et  $p_1^1(\theta)=\sin\theta$ . Le potentiel géomagnétique s'écrit alors :

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{a^3}{r^2} (g_1^0 \cdot \cos\theta + g_1^1 \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + h_1^1 \sin\phi \cdot \sin\theta) \quad (49)$$

Ce modèle correspond à un dipôle magnétique situé au centre de la Terre mais en présentant une déviation par rapport à l'axe NS (Figure 20).

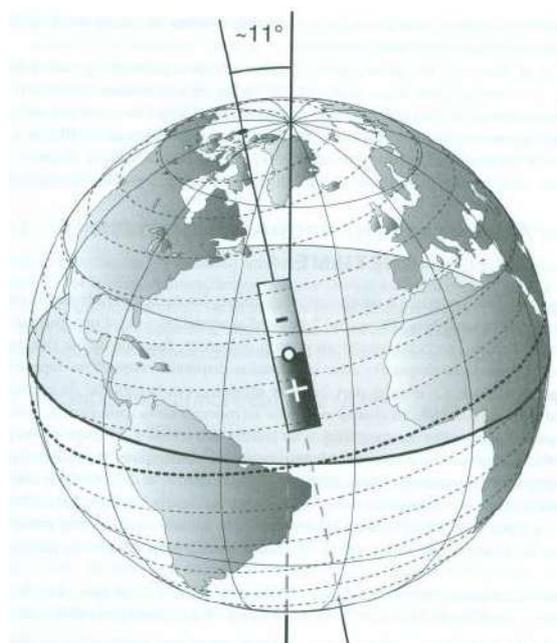


Figure 20. Dipôle centré

On peut voir des améliorations du champ magnétique terrestre par rapport au modèle du dipôle axial centré, particulièrement une déviation entre les pôles magnétique et géographique et aussi une déviation entre équateur magnétique et équateur géographique. Le modèle du dipôle centré reflète 95% de la morphologie du champ magnétique terrestre.

-----FIN-----

## Chapitre 5

### LA MECANIQUE DES FLUIDES

#### 1. Définitions

Au sens de la Physique, un fluide est un milieu **discontinu** constitué par des assemblages de particules (atomes ou molécules) libres de se mettre en mouvement les unes par rapport aux autres.

Au sens de la Mécanique des fluides (branche de la mécanique des milieux continue), un fluide est par contre un milieu **continu** doué de mobilité

L'hypothèse de la continuité est faite dans le but de pouvoir définir dans le temps et dans l'espace des propriétés physiques telles que la température  $T$ , la pression  $p$ , la viscosité  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ ... etc. La description du mouvement requiert une donnée cinématique : une vitesse  $\vec{V}$ . Ces fonctions sont considérées comme étant **continues** partout sauf sur un nombre fini de surface ou de lignes. Une conséquence immédiate de cette hypothèse est de permettre l'usage du calcul infinitésimal, outil puissant permettant de passer des équations ponctuelles aux lois globales concernant les domaines contenant ces particules.

Au point de vue cinématique on considère que le fluide est constitué de points matériels  $P$  dont on peut étudier le mouvement dans un repère de référence, comme en cinématique du point. En Mécanique des Fluides, on attribue les propriétés du point  $P$  à un petit élément de matière entourant  $P$ , appelé **particule**.

L'hypothèse de **mobilité** suppose que le fluide est un milieu **déformable**, capable de prendre la forme du récipient qui le contient, contrairement au solide. Les liquides et les gaz sont des fluides, et la différence entre eux, réside au fait que les liquides sont dotés d'une **surface libre** alors que les gaz occupent tout l'espace qui leur est offert.

#### 2. Cinématique des fluides

On s'intéresse ici au mouvement des particules sans se soucier de sa cause (les forces). On va déterminer la vitesse et l'accélération d'une particule de fluide en mouvement. En mécanique des fluides deux approches sont utilisées pour décrire le mouvement d'un système.

##### 2.1. L'approche Lagrangienne (Lagrange)

Dans la description Lagrangienne, **le mouvement est décrit par les trajectoires de particules prises individuellement**. Chaque particule est identifiée par la position  $M_0$  qu'elle occupait à l'instant  $t_0$  c'est-à-dire les coordonnées :  $x_0, y_0$  et  $z_0$ . (Figure 1)

La description du mouvement est donnée par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t, M_0) \quad (1)$$

Les coordonnées du point  $M$  sont des fonctions de  $x_0, y_0, z_0$  et  $t_0$  :

$$\begin{cases} x = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (2)$$

Les variables ainsi définies sont appelées variables de Lagrange.

La vitesse de la particule à un instant donné est donnée alors par :

$$\vec{v} = \left( \frac{\partial \overline{OM}}{\partial t} \right)_{M_0} = \vec{v}(t, M_0) \quad (3)$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont données par :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial x(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t} \\ v_y = \frac{\partial y(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t} \\ v_z = \frac{\partial z(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t} \end{cases} \quad (4)$$

L'accélération de la particule est donnée à tout instant par :

Son accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma} = \left( \frac{\partial^2 \overline{OM}}{\partial t^2} \right)_{M_0} = \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{M_0} = \vec{\gamma}(t, M_0) \quad (5)$$

Les coordonnées du vecteur accélération sont données par :

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial^2 x(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t^2} \\ \gamma_y = \frac{\partial^2 y(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t^2} \\ \gamma_z = \frac{\partial^2 z(t, x_0, y_0, z_0)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (6)$$

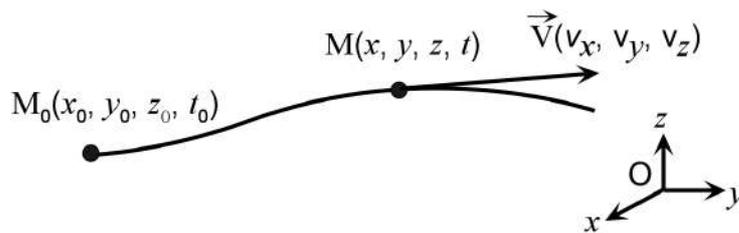


Figure 1. Identification d'une particule et sa trajectoire

Les **trajectoires** sont définies par les trois équations différentielles

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt \quad (7)$$

Qui déterminent un complexe de courbes. Chacune de ces courbes s'obtient en précisant la particule qui passe au point  $P_0$  à l'instant  $t_0$ .

Pour rendre compte de l'ensemble du système, dans cette approche, il faut étudier individuellement les particules, ce qui est pratiquement impossible. Vu la complexité des

mouvements, cette méthode n'est pas très convenable. Dans le cas des mouvements turbulents, l'intégration de l'équation (7) est impossible.

## 2.2. L'approche Eulérienne

En pratique les particules ne conservent pas leur individualité en raison de phénomènes physiques tels que la diffusion moléculaire. **Au lieu de suivre la particule dans son mouvement on préfère s'intéresser à ce qui se passe en un point fixe de l'espace.**

Soit à calculer la vitesse par exemple en un point  $M$ .

Dans l'approche d'Euler, la vitesse calculée est celle de la particule passant par  $M$  et non pas une particule bien précise. A l'instant  $t$ , il y a en  $M$  une particule de vitesse  $\vec{v}$ , et à l'instant  $t + dt$ , c'est d'une autre particule qu'il s'agit de vitesse  $\vec{v}'$ .

En  $M$  à l'instant  $t$  :

$$\vec{v} = \vec{v}(M, t) = \vec{v}(x, y, z, t) \quad (8)$$

La description du mouvement à partir de ces vitesses constitue la description eulérienne du mouvement. Les coordonnées  $x, y, z$  et  $t$  sont les variables d'Euler.

A l'instant  $t$ , le vecteur  $\vec{v}(M)$  définit un champ de vecteurs dont on peut déterminer les lignes et les surfaces de courant qui sont tangents aux vecteurs vitesses en chacun de leurs points (Figure 2). Mathématiquement cela se traduit par ( $\vec{dl}$  étant le déplacement élémentaire) :

$$\vec{v} \wedge \vec{dl} = \vec{0} \quad (9)$$

Les équations des lignes de courant sont obtenues en résolvant l'équation 9 ci-dessus, soit le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (10)$$

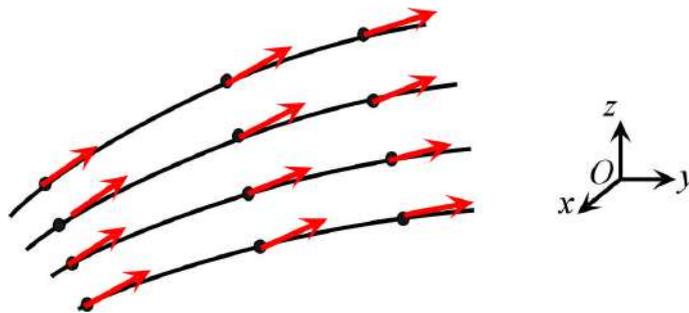


Figure 2. Lignes de courant

## 2.3. Détermination du champ des accélérations

Soit une particule  $P$  et  $O$  l'origine du référentiel. A l'instant  $t$ , la particule  $P$  est en  $M$ , sa vitesse est  $\vec{v}(\overline{OM}, t)$ . A l'instant  $t' = t + dt$ , elle est en  $M'$ , sa vitesse est  $\vec{v}'(\overline{OM'}, t + dt)$ . Les coordonnées des points  $M$  et  $M'$  sont reliées par la relation suivante :

$$\begin{cases} x' = x + v_x dt \\ y' = y + v_y dt \\ z' = z + v_z dt \end{cases} \quad (11)$$

En cinématique, l'accélération de la particule  $P$  au point  $M$  et à l'instant  $t$  est définie par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (12)$$

En exprimant la différentielle  $d\vec{v}$  et en remarquant qu'il s'agit de 4 variables :  $x, y, z$  et  $t$ , l'accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma} = \frac{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt}{dt} \quad (13)$$

Soit :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (14)$$

Ce que l'on note symboliquement :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (15)$$

En développant le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (15), on peut voir que :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (16)$$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  : L'accélération locale

$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v}$  : L'accélération convective

L'accélération locale traduit la non permanence du mouvement tandis que l'accélération convective traduit sa non uniformité.

## 2.4. Dérivée particulaire

➔ Dérivée particulaire d'une fonction scalaire.

La notion de dérivée particulaire traduit un point de vue Lagrangien.

Soit  $f(M, t)$  une fonction scalaire du point  $M$  en déplacement. La variation de  $f$  durant un laps de temps est donnée par ( $x, y$  et  $z$  étant les coordonnées de  $M$ ) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (17)$$

En divisant par  $dt$ , il vient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (18)$$

Soit encore et en remarquant les composantes du vecteur vitesse :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f \quad (19)$$

Les coordonnées dont il est question ici sont les coordonnées d'Euler et la vitesse dont on parle est celle de la particule  $P$  quand elle atteint le point  $M$  fixe de l'espace.

→ Dérivée particulière d'une fonction vectorielle.

Soit  $\vec{A}(M, t)$  une fonction vectorielle du point  $M$  en déplacement

On applique la formule valable pour la fonction scalaire à chaque projection de la fonction vectorielle.

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla A_i = \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (i, j = x, \dots, z) \quad (20)$$

Dans cette forme compacte, il y a sommation de trois monômes quand le même indice se présente deux fois dans un terme

Si le vecteur  $\vec{A}$  est la vitesse  $\vec{v}$ , nous obtenons les équations (15) et (16).

## 2.5. Dérivée d'une intégrale de volume

Soit  $D$  un domaine en mouvement et soit l'intégrale:

$$K = \iiint_D f(M, t) d\tau \quad (21)$$

On a:

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_D \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{v}) \right) d\tau = \iiint_D \left( \frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \vec{v} \right) d\tau \quad (22)$$

On remarquera au passage que  $\nabla \cdot (f \vec{v}) = f \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla f$

Ou encore :

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iiint_D \nabla \cdot (f \vec{v}) d\tau \quad (23)$$

Soit

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iint_S f \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (24)$$

Que l'on peut encore écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D f d\tau + \iint_S f v_n dS \quad (25)$$

Interprétation :

Au deuxième membre de cette équation :

→ La première intégrale représente la variation par unité de temps, de la quantité  $F$  dont  $f$  en représente la quantité volumique, contenue dans le domaine  $D$ , considéré comme fixe. Par exemple la masse et la masse volumique (dans l'ordre)

→ La deuxième intégrale représente le débit de  $F$  à travers  $S$  (ou le flux de  $f \vec{v}$  à travers  $S$ )

Remarque :

Quand on dit débit on sous-entend une quantité par unité de temps.

## 2.6. Equations de conservation de la masse

Avant de s'attaquer proprement aux équations du bilan massique, nous allons définir d'abord quelques grandeurs très usitées en MDF.

### ■ Vecteur densité de courant, lignes de courant et tube de courant

Soit donc un domaine  $D$  quelconque de fluide. En chaque point de ce domaine on peut définir une vitesse  $\vec{v}$  et une masse volumique  $\rho$  (Figure 3).

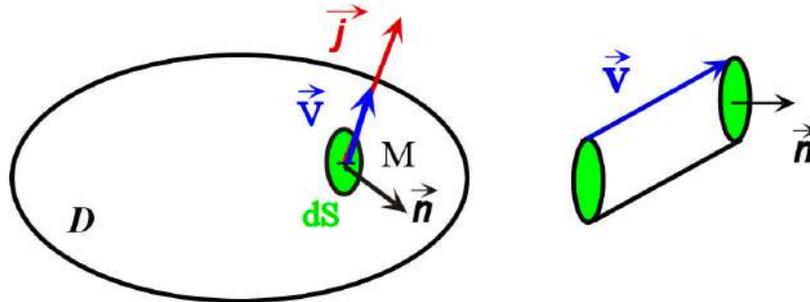


Figure 3. Vecteur densité de courant

Le vecteur densité de courant au point  $M$  (comme pour l'électricité) est donné par :

$$\vec{j} = \rho(M, t)\vec{v} \quad (26)$$

Les lignes de courant sont des lignes tangentes en chacun de leurs points aux vecteurs vitesse, donc aux vecteurs densité de courant. Le tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

### ■ Débit massique

Le débit massique  $q_m$  représente la masse traversant une surface pendant l'unité de temps. La quantité de matière traversant la surface élémentaire  $\vec{dS}$  pendant l'élément de temps est celle contenue dans le cylindre (oblique) de base  $dS$  et de hauteur  $v_n \cdot dt$  ( $v_n$  étant la projection de  $\vec{v}$  sur  $\vec{n}$ ).

$$dm = \rho \cdot v_n \cdot dt \cdot dS \quad (27)$$

Le débit massique élémentaire est donc :

$$dq_m = \frac{dm}{dt} = \rho v_n dS = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (28)$$

Le débit massique total est :

$$q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (29)$$

### ■ Enoncé du principe

La masse d'un domaine  $D$  quelconque de fluide, que l'on suit dans son déplacement, et qui n'est le siège ni d'une production intérieure de fluide ni ne reçoit de flux à travers sa surface, reste constante.

L'expression de la masse est donnée par :

$$m = \iiint_D \rho(M, t) dt \quad (30)$$

Le fait que cette masse est constante équivaut à :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(M, t) d\tau = 0 \quad (31)$$

Bien évidemment cet énoncé traduit un point de vue Lagrangien (on suit le domaine dans son déplacement)

#### ■ Equation ponctuelle

Appliquons le théorème de la dérivée particulière d'une intégrale de volume d'une fonction scalaire. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho d\tau = \iiint_D \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) d\tau = 0 \quad (32)$$

Le domaine étant arbitraire nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (33)$$

C'est l'**équation de continuité**, très importante en mécanique des fluides. Elle traduit tout simplement le **principe de conservation de la masse**.

On peut écrire cette équation différemment en notant que :

$$\nabla \cdot \rho \vec{v} = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \rho. \quad (34)$$

En effet :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (35)$$

On peut voir aisément que la somme des deux premiers termes du deuxième membre de l'égalité n'est autre que  $\frac{d\rho}{dt}$ .

Soit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (36)$$

#### ■ Généralisation

Si le domaine peut être le siège d'une production intérieure de fluide (réaction chimique, source...etc.) à raison de  $\iiint_D r d\tau$  par unité de temps. Il peut aussi recevoir à travers la surface S un flux de  $-\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$  par unité de temps.

#### **Bilan massique du système**

Les échanges de fluide avec le milieu extérieur ainsi que la production intérieure de fluide représentent la variation de la masse par unité de temps à l'intérieur du domaine. On écrira donc en notant au passage que :  $\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D \nabla \cdot \vec{j} d\tau$  (le théorème de Green-Ostrogradski) :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_D r d\tau - \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iiint_D (r - \nabla \cdot \vec{j}) d\tau \quad (37)$$

En appliquant le théorème de la dérivée particulière d'une intégrale de volume d'une fonction l'équation (22) se réécrit alors :

$$\iiint_D \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) d\tau = \iiint_D (r - \nabla \cdot \vec{j}) d\tau \quad (38)$$

Ce qui nous permet d'avoir finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = r - \nabla \cdot (\rho \vec{v} + \vec{j}) \quad (39)$$

L'équation (39) représente **l'équation de continuité généralisée**.

## 2.7. Différents types d'écoulement

### → Ecoulement permanent ou stationnaire

Les champs vectoriels et scalaires sont indépendants du temps. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

### → Ecoulement incompressible

Un fluide incompressible vérifie l'équation :

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (41)$$

Dans ce cas on peut trouver un vecteur  $\vec{A}$  (équations (37) et (38) de la Boîte à Outils) de manière que :

$$\vec{v} = \text{rot} \vec{A} \quad (42)$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (43)$$

Soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (44)$$

L'équation (43) ne signifie pas que la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace mais simplement que la masse volumique d'une particule ne varie pas quand elle en mouvement. C'est le cas de deux fluides immiscibles. Nous avons en effet et en même temps :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \rho = \rho(x, y, z, t).$$

### Discussion

■  $\nabla \rho = \vec{0}$  (La masse volumique ne varie pas dans l'espace).

L'équation de continuité se réduit à :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . C'est-à-dire que  $\rho$  ne varie pas non plus dans le temps. Donc :  $\rho = \text{Cte}$  dans tout le fluide. C'est le cas des fluides homogènes incompressibles.

■  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (En un point fixe la masse volumique ne dépend pas du temps)

3 cas sont possibles.

❶  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $\nabla \rho$  est quelconque. Le fluide est en état de repos (statique), homogène ou non.

❷  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\nabla \rho = \vec{0}$ . La masse volumique est constante dans l'espace et dans le temps.

③  $\vec{v}$  et  $\nabla\rho$  sont orthogonaux en tous points de l'écoulement. Le fluide n'est pas homogène mais les lignes de courant et les lignes isochores (ayant des volumes égaux, donc d'égales masses volumiques) sont perpendiculaires

➔ **Écoulement irrotationnel**

Un écoulement irrotationnel est défini par :

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{0} \tag{45}$$

Dans ce cas la vitesse dérive d'un potentiel (Voir Chapitre 1 équations (35) et (36)) :

$$\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi \tag{46}$$

Les surfaces équipotentielles sont définies par :  $\varphi = \text{cte}$  et sont perpendiculaires aux vecteurs vitesse c'est-à-dire aux lignes de courant. La détermination de la fonction est possible à, partir de l'équation (46).

➔ **Écoulement stationnaire, incompressible, irrotationnel et plan d'un fluide non visqueux**

Cette hypothèse constitue une bonne approximation d'écoulement réel des liquides et des gaz.

•Écoulement stationnaire (permanent) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \tag{47}$$

•Écoulement incompressible

$$\text{div}\vec{v} = 0 \tag{48}$$

Dans ce cas (voir chapitre 1, équations (37) et (38)), il existe un vecteur  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{v} = \text{rot}\vec{A} \tag{49}$$

•**Écoulement plan**

On appelle écoulement plan, ou à deux dimensions, un mouvement où les phénomènes se répètent sur des plans parallèles de telle manière que, si l'on sait ce qui se passe sur un plan on sait ce qui se passe dans tout l'écoulement. Cela veut dire que le vecteur vitesse dépend de deux coordonnées :  $x$  et  $y$  par exemple. Dans ce cas, choisissons un contour fermé dans le plan de l'écoulement et calculons le flux du vecteur vitesse à travers une surface délimitée par ce contour (la surface est aussi plane) :

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \text{rot}\vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \tag{50}$$

L'application du théorème de Stokes (chapitre 1, équation 55) donne :

$$\iint_S \text{rot}\vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \tag{51}$$

Puisque la relation (51) est valable quelque soit le contour, cela veut dire qu'en tout point, le vecteur  $\vec{A}$  est perpendiculaire à l'élément  $\overrightarrow{dl}$  ( $\vec{A} \perp \overrightarrow{dl}$ ). Le vecteur  $\vec{A}$  est donc perpendiculaire à l'écoulement. Nous sommes en mesure d'écrire :

$$\vec{A} = -\psi \vec{k} \tag{52}$$

$\psi$  est appelée fonction courant

Les lignes de courant sont décrites par l'équation  $\psi = Cte$ . En effet :

$$\psi = cte \Rightarrow d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0 \quad (53)$$

Or du fait de (49) et de (52) nous avons :

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (54)$$

Donc en vertu de (53) :

$$v_y dx - v_x dy = 0 \Rightarrow \vec{v} \parallel \overline{dl} \quad (55)$$

Finalement  $\psi = Cte$ , implique que la vitesse est parallèle au vecteur déplacement élémentaire (CQFD).

### •Écoulement laminaire et écoulement turbulent

Un écoulement est dit **laminaire**, lorsqu'il est régulier dans le temps et dans l'espace. Dans le cas de l'écoulement permanent les lignes de courant sont des courbes fixes dans l'espace, elles ne s'entremêlent pas au cours du mouvement. Les couches fluides glissent les unes sur les autres sans qu'il y ait passage d'une particule d'une couche à l'autre).

Dans le cas de l'écoulement **turbulent** chaque particule, en plus de la vitesse dans le sens de l'écoulement, est animée d'un mouvement d'agitation avec des vitesses transversales à l'écoulement. La turbulence est essentiellement provoquée par la viscosité.

### 2.8. Equation intégrée

Reprenons l'équation (23) en y appliquant la formule de la divergence. Nous trouverons :

$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau + \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (56)$$

La première intégrale représente la variation, pendant le temps  $dt$ , de la masse de fluide contenue dans le domaine D considéré comme fixe (par rapport au référentiel servant à mesurer  $\vec{v}$ ). Quant à la deuxième, elle représente la somme des débits massiques de fluides à travers la surface D (ces débits peuvent être positifs ou négatifs).

Plus simplement nous dirons que le principe de conservation de la masse stipule que la différence entre les débits massiques entrants et ceux sortants est égale à la variation de la masse du domaine considéré, par unité de temps.

L'élément différentiel  $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$  représente un débit massique élémentaire  $dq$  traversant  $dS$ .

$$dq = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho v_n dS \quad (57)$$

$dq > 0$  si  $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$  c'est un débit sortant

$dq < 0$  si  $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$  c'est un débit entrant

Si  $\rho$  ne dépend pas du temps, nous obtenons :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (58)$$

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{ou} \quad \iint_S dq = 0$$

**En régime permanent la somme des débits massiques à travers une surface fermée tracée dans le fluide est nulle. Les débits massiques entrants sont égaux aux débits sortants.**

**Exemple :**

L'écoulement permanent dans un conduit fixe (Figure 4). L'application de l'équation (58) permet d'obtenir (à retrouver par les étudiants) :

$$q_{m1} = q_{m2} \quad (59)$$

Respectivement les débits massiques à travers  $S_1$  et  $S_2$ . Si le fluide est homogène, les débits volumiques seront aussi égaux.

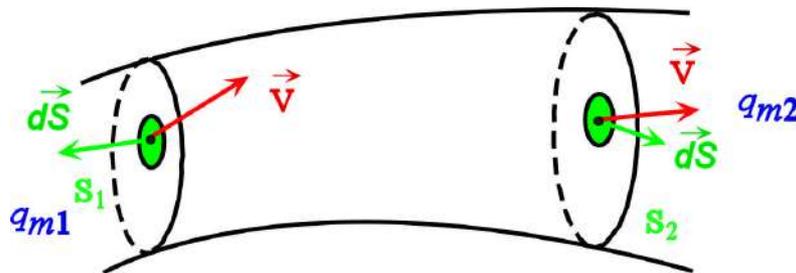


Figure 4. Conservation du débit massique à travers les sections d'un conduit fixe

### 3. Dynamique des fluides

#### 3.1. Natures des forces appliquées à un fluide

Considérons un domaine  $D$  d'un certain fluide limité par une surface  $S$  (Figure 5). Les forces agissant en chaque point  $M$  du fluide sont de deux types :

- **Les forces de volume** dues à la présence d'un champ, la pesanteur par exemple. Dans ce cas la force de volume sera le poids de la particule en  $M$ .
- **Les forces de surface** dues aux forces exercées par les autres particules du milieu sur la particule en  $M$  à travers sa surface élémentaire  $dS$  à raison de  $\vec{T}dS$ . La force par unité de surface  $\vec{T}$  appelée contrainte dépend de la position du point  $M$  et de l'orientation de la surface élémentaire  $dS$ . On peut décomposer  $\vec{T}$  et écrire :

$$\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t \quad (60)$$

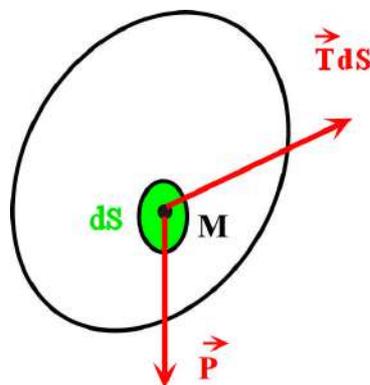


Figure 5. Types de forces agissant sur un fluide

$\vec{T}_n$  est la composante normale à la surface  $dS$ , c'est la **contrainte normale**.

$\vec{T}_t$  est la composante tangentielle à la surface  $dS$  c'est la **contrainte tangentielle (ou contrainte de glissement ou contrainte de cisaillement)**.

L'équation (60) peut être réécrite différemment si l'on s'accorde de distinguer deux effets dans l'expression de la contrainte  $\vec{T}$  appliquée à un élément de fluide en mouvement :

■ Le premier effet est celui engendré par le fluide au repos au point M. Il s'agit de la pression statique.

■ Le deuxième est lié à la faculté du fluide de se mouvoir, donc à sa mobilité et des forces engagées, à savoir les forces de frottement appliquées à la particule M. Ces forces traduisent en fait la viscosité du milieu.

Donc en conclusion on peut dire que la contrainte  $\vec{T}$  est la somme de la **pression statique (contrainte due au fluide au repos, toujours normale à la surface  $dS$ )** et de la **contrainte de viscosité**, que l'on peut écrire mathématiquement :

$$\vec{T} = -p\vec{n} + \vec{\tau} \quad (61)$$

Examinons maintenant la viscosité du fluide. Celle-ci est de deux types :

• Une viscosité de dilatation, qui caractérise la plus ou moins facilité avec laquelle un fluide se dilate, c'est-à-dire change de dimensions mais sans déformation angulaire. Cette viscosité est caractérisée par le paramètre  $\eta$ .

• Une viscosité de cisaillement, qui caractérise la plus ou moins facilité avec laquelle un fluide subit une déformation angulaire. Cette viscosité est caractérisée par le paramètre  $\mu$ .

Pour finir, supposons maintenant un fluide démuné de viscosité ou presque (**fluide parfait**) ( $\eta \approx 0$  et  $\mu \approx 0$ ), les forces de surface auxquelles il est soumis se réduisent aux forces de pression statique.

Donc dans le cadre de cette hypothèse les forces auxquelles le fluide est soumis sont les forces de volume et les forces de pression, les forces de viscosité étant négligées.

### ➔ Expressions des forces de volume et de pression

• **Forces de volume** (Figure 7)

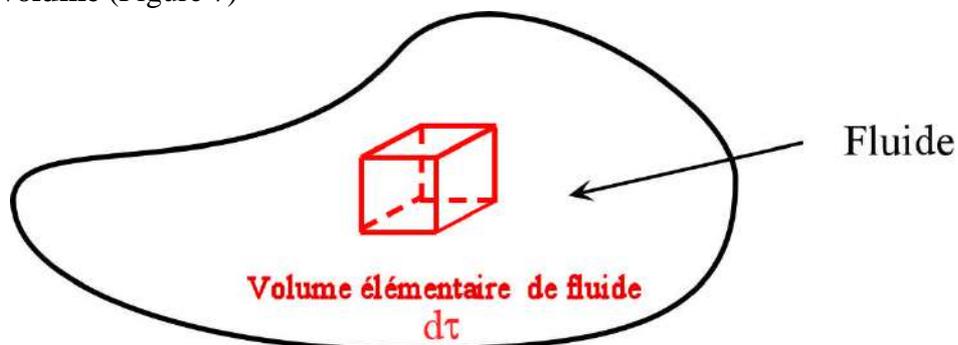


Figure 7. Identification de la Force de volume.

Soit  $d\vec{F}_v$  la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de volume  $d\tau$ . Nous pouvons écrire :

$$d\vec{F}_V = \vec{f}_v d\tau = \vec{f}_{mv} dm = \rho \vec{f}_{mv} d\tau \quad (62)$$

$\vec{f}_v$  : est une force par unité de volume (on dit aussi une densité volumique de force)

$\vec{f}_{mv}$  : est une force par unité de masse (on dit aussi une densité massique de force)

Pour calculer la force de volume qui s'exerce sur tout le domaine on intègre l'équation (62) :

$$\vec{F}_V = \iiint_V \rho \vec{f}_{mv} d\tau \quad (63)$$

Si les forces de volume se réduisent à celles de la gravitation terrestre, nous aurons :  $\vec{f}_{mv} = \vec{g}$ .

• **Forces de surface** (Figure 6)

Soit  $d\vec{F}_S$  la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface  $dS$ . Nous pouvons écrire, avec les hypothèses sus mentionnées :

$$d\vec{F}_S = -p \vec{n} dS = -p \vec{dS} \quad (64)$$

Pour calculer la force de surface qui s'exerce sur tout le fluide, on intègre l'équation (64) :

$$\vec{F}_S = -\iint_S p \vec{dS} \quad (65)$$

■ **Equivalent volumique des forces de pression.**

$$\vec{F}_S = -\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau \quad (66)$$

**Démonstration :**

Prenons l'équation (65) et multiplions ses deux membres par un vecteur quelconque  $\vec{A}$ , nous obtenons :

$$\vec{A} \cdot \vec{F}_S = -\vec{A} \cdot \iint_S p \vec{dS} = -\iint_S p \vec{A} \cdot \vec{dS} \quad (67)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradski donne :  $\iint_S p \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div} p \vec{A} d\tau$ .

Donc :

$$\vec{A} \cdot \vec{F}_S = -\iiint_V \text{div} p \vec{A} d\tau \quad (68)$$

On sait aussi que :  $\text{div} p \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{A} + p \cdot \text{div} \vec{A}$

$\vec{A}$  étant un vecteur constant, on obtient :  $\text{div} \vec{A} = 0$ , ce qui permet d'écrire :

$$\vec{A} \cdot \vec{F}_S = -\iiint_V \text{div} p \vec{A} d\tau = -\vec{A} \cdot \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau \quad (69)$$

Soit donc enfin :

$$\vec{F}_S = -\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau \quad (70)$$

### 3.2. Théorème de la quantité de mouvement

Maintenant que nous avons fait l'inventaire des forces en jeu, appliquons le théorème de la quantité de mouvement.

### **Enoncé du théorème de la quantité de mouvement :**

Dans un référentiel galiléen la résultante des forces extérieures à un système est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du système.

Ceci n'est autre que la relation fondamentale de la dynamique. C'est aussi le deuxième principe de Newton.

Appliquons donc le théorème de la quantité de mouvement à une particule de fluide :

$$\overrightarrow{dF}_s + \overrightarrow{dF}_v = dm\vec{\gamma} = dm \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (71)$$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p d\tau + \overrightarrow{\rho f}_{mv} d\tau = \rho d\tau \vec{\gamma} \quad (72)$$

En utilisant l'expression de l'accélération donnée par les équations (6) et (7) on peut écrire respectivement :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \overrightarrow{\rho f}_{mv} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad (73)$$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \overrightarrow{\rho f}_{mv} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (74)$$

On peut écrire aussi ces deux équations simplement :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \overrightarrow{\rho f}_{mv} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (75)$$

Dans le champ de pesanteur terrestre la dernière équation s'écrira (**l'axe des z étant orienté positivement vers le haut**) :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{aligned} \quad (76)$$

Ces équations représentent une forme très simplifiée **des équations de Navier-Stokes**.

### **Equation de Bernoulli**

Ajoutons maintenant d'autres hypothèses, en plus de l'hypothèse du fluide parfait :

- Régime permanent
- Fluide homogène et incompressible.
- Référentiel galiléen (pas de force d'inertie) : La RFD s'applique telle qu'elle.
- Champ de pesanteur terrestre.

Reprenons l'équation (74) et transformons-la en remarquant que.  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{f}_{mv} = \vec{g}$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho \vec{g} = \rho \left( \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (77)$$

Le fluide étant homogène et incompressible  $\rho = cte$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + \rho(\text{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (78)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + \rho(\text{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}p - \rho \vec{g} = 0 \quad (79)$$

Remarquons au passage que  $\rho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho gz)$  (*l'axe des z étant orienté positivement vers le haut*)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz\right) + \rho(\text{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} = 0 \quad (80)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz\right) = -\rho(\text{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (81)$$

Si en plus l'écoulement est irrotationnel, nous obtiendrons :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz\right) = \vec{0} \quad (82)$$

Soit donc :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz = Cte \quad (83)$$

Si l'écoulement n'est pas irrotationnel, l'équation précédente reste valable, le long d'une ligne de courant.

-----FIN-----

## Chapitre 6

### ONDES ET ELASTICITE DES ROCHES DUSOUS-SOL

#### 5.1. Notion d'élasticité

##### 5.1.1. Généralités

Les dimensions et la forme d'un corps solides peuvent changer sous l'effet de forces appliquées à sa surface. Ces forces externes sont contrecarrées par des forces internes qui s'opposent aux changements de dimension et de forme, si bien que le corps retrouve sa forme et dimension initiales dès lors que ces forces cessent. Cette faculté des corps à retrouver leur forme et leurs dimensions d'origine porte le nom *d'élasticité*. Un corps parfaitement élastique retrouve totalement son état initial après avoir été déformé. Les roches du sol-sol sont considérées comme étant des corps parfaitement élastiques, tant que les déformations qu'elles subissent demeurent faibles.

La théorie de l'élasticité étudie les changements des corps en fonction des forces qui leurs sont appliquées. Les relations entre ces forces et les modifications engendrées sont exprimées en utilisant les concepts de *contrainte* et de *déformation*.

La théorie de l'élasticité des matériaux est à la base de la transmission des ondes acoustiques dans le sous-sol, d'où l'intérêt d'introduire certains paramètres ou modules élastiques caractérisant un corps soumis à une force, sans subir une déformation permanente.

##### 5.1.2. Contrainte

La contrainte est définie comme une force par unité de surface (force surfacique). Illustrons cela avec un exemple simple.

Soit une éprouvette sur laquelle on fait un essai de traction (Figure 1).

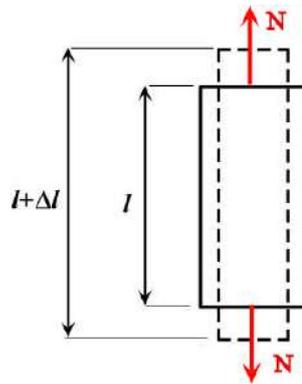


Figure 1. Eprouvette cylindrique soumise à une traction

La contrainte est définie par :

$$N = \frac{F}{S}$$

$F$  étant la force appliquée aux frontières basales, de surface  $S$ , de l'éprouvette. L'unité de la contrainte  $N$  étant le Pascal (Pa), lorsque la force est exprimée en Newton (N) et la surface en  $m^2$ .

On voit bien que la contrainte de traction a provoqué l'élongation de l'éprouvette. Si on répète plusieurs fois cette expérience on peut tracer la courbe suivante (Figure 2) représentant la contrainte en fonction de la déformation.

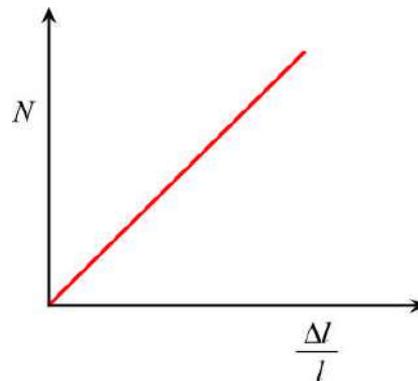


Figure 2. Loi de l'élasticité.

On voit bien qu'il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations.

$$N = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

On constante aussi que :

$$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad (2)$$

E s'appelle le **module de Young** (unité homogène à une pression) et  $\sigma$  porte le nom de **coefficient de Poisson** (sans unité).

Dans cet exemple nous avons considéré délibérément le cas d'une contrainte normale à la surface sur laquelle elle s'applique. On sait qu'une force peut avoir une direction quelconque par rapport à la surface sur laquelle elle s'exerce. Dans ce cas on la décompose en une composante normale et en une composante tangentielle. Nous utiliserons la même chose en ce qui concerne la contrainte. On parlera alors d'une contrainte normale pour indiquer celle correspondant à la composante normale de la force et d'une contrainte de cisaillement pour indiquer celle correspondant à la composante tangentielle de la force.

Pour examiner les propriétés de ces contraintes considérons un volume élémentaire (un parallélépipède rectangle infiniment petit) à l'intérieur d'un corps soumis à des contraintes (Figure 3). Faisons l'inventaire des contraintes agissant sur les six faces de ce parallélépipède rectangle élémentaire.

Prenons la face DGF E. La force agissant sur cette face à une direction quelconque mais qu'on peut décomposer en une composante normale et deux composantes tangentielles (car nous somme dans l'espace). Aux composantes de la force vont correspondre une contrainte normale (elle sera porté par l'axe des  $x$ ), une contrainte tangentielle, portée par l'axe des  $y$  et une autre contrainte tangentielle portée par l'axe des  $z$ . Ces contraintes on va les appeler respectivement  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$ .

#### **Signification de l'écriture indicée de la contrainte :**

Les indices indiquent les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  naturellement, mais en ce qui concerne la contrainte par exemple  $\sigma_{xy}$ , cela veut dire qu'on parle de la contrainte parallèle à l'axe des  $x$  et agissant une surface perpendiculaire à l'axe des  $y$ . Quand les deux indices sont identiques cela signifie que la contrainte est normale.

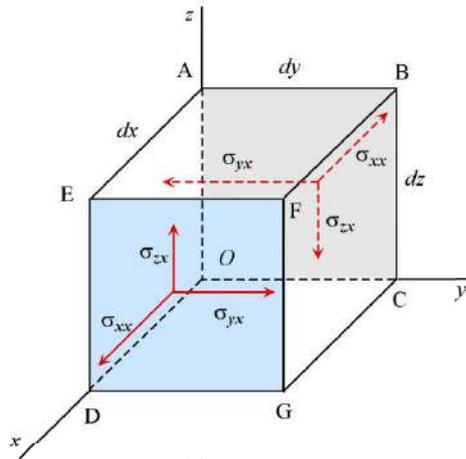


Figure 3. Contraintes et leurs composantes.

### Propriétés

Prenons maintenant, deux à deux, les facettes de ce parallélépipède rectangle que l'on suppose *en équilibre statique*. Commençons par les facettes colorées DGFE et OCBA.

Les contraintes agissant sur ces deux facettes, prises deux à deux (contrainte normale et contrainte normale, contrainte tangentielle et contrainte tangentielle) se doivent d'être égales et de sens opposés (ce que l'on peut voir sur la Figure 3 : les contraintes représentées en trait continu et celles représentées en trait discontinu). Pour les autres paires de facettes on se tiendra au même raisonnement.

Examinons maintenant les contraintes tangentielles  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yx}$  que l'on peut voir sur la Figure 4 ci-dessous. Nous avons une paire de contraintes  $\sigma_{xy}$  et une paire de contraintes  $\sigma_{yx}$ . Chacune des paires de contrainte constitue un couple tendant à faire tourner le volume élémentaire autour de l'axe des z. Seuls ces deux couples interviennent lorsqu'il s'agit de la rotation du volume élémentaire autour de l'axe des z, les autres forces ont des moments nuls. Or le parallélépipède rectangle est en équilibre donc la somme de ces deux moments est nulle. On écrira :

Le moment du couple agissant sur la face jaune et sur celle qui lui est opposée (les faces CDFG et OAED) est :  $(\sigma_{xy} \cdot dx dz) \cdot dy$

Le moment du couple agissant sur la face bleue et sur celle qui lui est opposée (les faces DGFE et OCBA) est :  $(\sigma_{yx} \cdot dy dz) \cdot dx$

Ces deux moments sont égaux et donc :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (3)$$

Pour les autres couples intervenant dans le cas des autres rotations possibles à savoir autour des axes x et y, nous devons trouver la même chose. En conclusion nous aurons donc :

$$\forall i, j \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4)$$

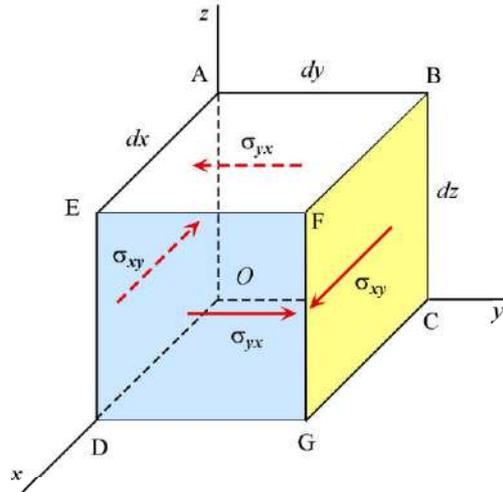


Figure 4. Contraintes de cisaillement

### 5.1.2. Déformation

Quand un corps est soumis à des contraintes, il change de forme et de dimensions. Ces changements sont appelées déformations.

Mais quels sont les types de déformations auxquelles on assiste quand un corps est soumis à des contraintes ? Pour répondre à cette question on va essayer de voir ce qui se passe au niveau d'un corps bidimensionnel (Figure 5), ensuite on généralisera pour les corps en dimension 3.

Considérons pour cela une plaque rectangulaire PQRS dans le plan  $xOy$ . Quand on applique une contrainte à la plaque, le point P se déplace en P', et le vecteur déplacement engendré  $\overline{PP'}$  ( $u, v$ ) a pour coordonnées  $u$  et  $v$ .

Faisons maintenant quelques suppositions :

→ Si les autres points Q, R et S se sont déplacés en Q', R' et S', de la même quantité, c'est à dire  $\overline{PP'} = \overline{QQ'} = \overline{RR'} = \overline{SS'}$ , alors le rectangle PQRS a subi seulement une translation et il n'y a ni changement de dimensions ni de forme. Dans ce cas le corps n'a subi aucune déformation.

→ Si, en revanche, les points Q, R et S ne se sont pas déplacés de la même quantité, c'est à dire que les vecteurs déplacements engendrés sont différents, alors là le rectangle présentera un changement de dimensions et de forme (les angles ne seront plus droits) : il aura donc subi une déformation. Essayons de voir maintenant comment on pourra quantifier tout cela.

Soient les grandeurs  $u = u(x, y)$  et  $v = v(x, y)$ .

Les coordonnées des points P, Q, R et S d'une part et P', Q', R' et S' d'autre part sont :

$$\begin{aligned}
 P(x, y); & \quad P'(x+u, y+v) \\
 Q(x+dx, y+dy); & \quad Q'(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx) \\
 S(x, y+dy); & \quad S'(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy) \\
 R(x+dx, y+dy); & \quad R'(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy)
 \end{aligned} \tag{5}$$

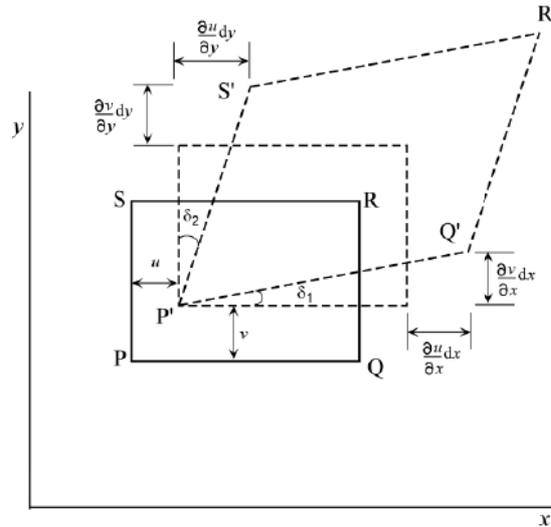


Figure 5. Analyse d'une déformation à 2 dimensions

Voyons de combien les côtés  $PQ$  et  $PS$  se sont ils allongés. Calculons pour cela la taille du côté  $P'Q'$ .

$$P'Q' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} \quad (6)$$

Les quantités  $u$  et  $v$  sont très petites par rapport aux dimensions du rectangle  $dx$  et  $dy$  ; les quantités  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  sont suffisamment petites pour que leurs puissances et leurs produits soient négligeables. De ce fait :

$$P'Q' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2} = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (7)$$

■ Le côté  $PQ$  s'est allongé de la quantité  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  et en menant les calculs de la même façon on trouvera que le côté  $PS$  s'est allongé de la quantité  $\frac{\partial v}{\partial y} dy$ . Les rapports  $\frac{P'Q'}{PQ}$  et  $\frac{P'S'}{PS}$  sont les élongations respectivement suivant l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  et valent respectivement  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  ;

■ Les mesure des angles infinitésimaux engendrés sont  $\delta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\delta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

■ L'angle droit en  $P$  décroît de la quantité  $\delta_1 + \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ .

■ Le rectangle dans son ensemble a tourné dans le sens trigonométrique de l'angle  $\delta_1 - \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ .

On constate bien que :

◆ Les dimensions du rectangle ont changé. Les quantités  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}$  (les élongations)

constituent les *déformations normales*.

◆ L'angle droit a diminué de la quantité  $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ , ce qui traduit en fait une mesure du changement de la forme ; cette quantité est appelée **cisaillement**.

◆ La quantité  $\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  en revanche n'est pas une déformation mais exprime tout simplement l'angle de rotation du rectangle autour de l'axe z.

### Généralisation

Dans le cas d'un volume tridimensionnel, on écrira que les composantes du déplacement d'un point P du parallélépipède rectangle élémentaire sont  $(u, v, w)$  et en suivant formellement l'analyse précédente, on définira les déformations élémentaires comme suit :

→ Déformations normales

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{8}$$

→ Déformations de cisaillement

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\tag{9}$$

→ En plus de ces déformation le parallélépipède rectangle subit une rotation dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \theta_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{10}$$

De l'équation (7) et en généralisant on peut voir que les nouvelles dimensions du parallélépipède rectangle déformé sont :  $dx(1 + \varepsilon_{xx})$ ,  $dy(1 + \varepsilon_{yy})$  et  $dz(1 + \varepsilon_{zz})$ . Le volume du corps déformé est alors d'environ  $(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})dxdydz$ . La variation de volume par unité de volume, appelée dilatation est donnée par :

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\tag{11}$$

### 5.1.3. Loi de Hooke

La loi de Hooke permet de calculer les déformations d'un corps en fonction des contraintes auxquelles il est assujéti. Cette loi n'est valable que pour les petites déformations. En effet

passé un certain seuil de contrainte le corps présente des déformations irréversibles et n'est plus donc élastique. La loi est valable dans le domaine d'élasticité des matériaux.

En général la loi de Hooke est complexe mais que l'on peut exprimer plus ou moins simplement pour les corps isotropes comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{ii}; & i = x, y, z \\ \sigma_{ij} &= \mu\varepsilon_{ij}; & i, j = x, y, z; \quad i \neq j\end{aligned}\quad (12)$$

Les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelées **constantes de Lamé**. La constante  $\mu$  traduit la résistance au cisaillement en effet si l'on écrit  $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$  on voit bien que  $\varepsilon_{ii}$  est d'autant plus petit que  $\mu$  est grand. A cet effet, la constante  $\mu$  est souvent appelée **module de rigidité** ou **module de cisaillement**.

### 5.1.3. Constantes élastiques

Mettons-nous dans les conditions de la Figure 1 mais en considérant une éprouvette parallélépipédique et subissant une traction suivant l'axe des  $x$ .

Comme pour l'éprouvette cylindrique on aura :

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \\ \sigma &= -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}\end{aligned}\quad (13)$$

Les constantes  $E$  et  $\sigma$  sont définies comme étant le **module de Young** et le **coefficient de Poisson**. On définit aussi une autre constante dite le **module d'incompressibilité**  $K$  que l'on définit comme suit :

On considère un milieu soumis à une pression hydrostatique  $p$ , c'est à dire :  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$  et  $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ . Le module **d'incompressibilité**  $K$  exprimé en unité de pression, est défini alors par :

$$K = -\frac{p}{\Delta}\quad (14)$$

Ces constantes (le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson et le module d'incompressibilité) peuvent être exprimées en fonction des constantes de Lamé :

$$\begin{aligned}E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \\ \sigma &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ K &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\end{aligned}\quad (15)$$

Les constantes définies ci-dessus l'ont été en supposant un milieu isotrope, or les roches du sous sol ne le sont pas (stratification, schistosité, etc.). De ce fait les mesures de ces constantes dépendent de l'anisotropie et l'on a trouvé des différences allant de 20 à 25% entre les mesures effectués parallèlement aux anisotropies et celles effectuées perpendiculairement à celles-ci. Cependant cet état de fait est négligé quand il s'agit de l'étude de la propagation

des ondes dans le sous-sol et l'on considère les roches comme étant isotropes, autrement les équations seront davantage compliquées.

Les constantes définies précédemment (le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson et le module d'incompressibilité) sont positives et de ce fait vérifient quelques conditions :

$$0 \leq \sigma \leq 0.5 \quad (16)$$

◆ Dans la pratique les valeurs du coefficient de Poisson varient entre 0.05 pour les roches très dures et rigides à 0.45 pour les sédiments mous et meubles.

◆ Les liquides n'ont pas de résistance au cisaillement, quand ils sont comparés aux roches, donc  $\mu = 0$ . Il s'en suit alors que  $\sigma = 0.5$

◆ Pour la plupart des roches  $E$ ,  $K$  et  $\mu$  varient entre 0.2 à 1.2 Mégabars,  $E$  étant en général le plus élevé et  $\mu$  le plus petit des 3.

## 5.2. Mouvement des ondes

### 5.2.1. Equation d'onde

Considérons maintenant le même volume élémentaire que précédemment (un parallélépipède rectangle infiniment petit) à l'intérieur d'un corps soumis à des contraintes et qui n'est plus en équilibre (Figure 6). Faisons là encore l'inventaire des contraintes agissant sur les six faces de ce parallélépipède rectangle élémentaire.

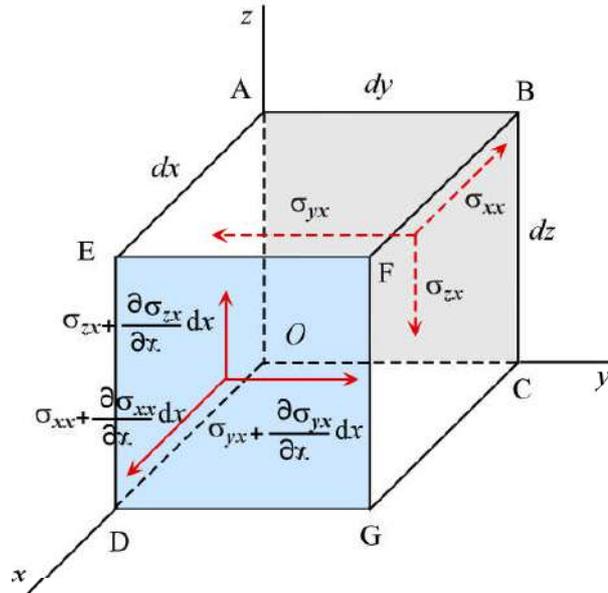


Figure 6. Contraintes sur un volume élémentaire en mouvement

→ Prenons les faces deux à deux et commençons par celles colorées. Celles-ci ne seront plus assujetties aux mêmes contraintes. Sur la face DGFE les contraintes appliquées sont :

Selon l'axe des  $x$  :  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$  ,

Selon l'axe des  $y$  :  $\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx$

Selon l'axe des  $z$  :  $\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$

Les composantes de la force exercée sur la face DGFE sont alors :

Selon l'axe des  $x$  :  $\left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz$  ,

Selon l'axe des  $y$  :  $\left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx \right) dydz$

Selon l'axe des  $z$  :  $\left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx \right) dydz$

Les forces exercées sur les faces DGFE et OCBA sont opposées, il s'en suit que la résultante de ces deux forces à pour composantes :

Selon l'axe des  $x$  :  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$

Selon l'axe des  $y$  :  $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx dy dz$

Selon l'axe des  $z$  :  $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx dy dz$

→ Sur les faces GCBF et DOAE, on utilisera le même raisonnement, les composante de la résultante des forces appliquées à ces deux faces seront :

Selon l'axe des  $x$  :  $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dx dy dz$

Selon l'axe des  $y$  :  $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz$

Selon l'axe des  $z$  :  $\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dx dy dz$

→ Sur les faces DGCO et EFBA, on utilisera le même raisonnement, les composante de la résultante des forces appliquées à ces deux faces seront :

Selon l'axe des  $x$  :  $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dx dy dz$

Selon l'axe des  $y$  :  $\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dx dy dz$

Selon l'axe des  $z$  :  $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dx dy dz$

Les composantes de la résultante  $\vec{F}$  des forces causant les contraintes sont la somme des composantes des forces exercées sur les faces prises 2 à 2.

Suivant l'axe des  $x$  :  $\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz$

Suivant l'axe des  $y$  :  $\left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz$

Suivant l'axe des  $z$  :  $\left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$

Le volume élémentaire est soumis aussi à son poids :  $\vec{P} = dm \vec{g} = \rho dx dy dz \vec{g}$

Le volume élémentaire a effectué un déplacement élémentaire moyen de  $\overline{PP'}(u, v, w)$  (voir Figure 5), l'accélération est donc  $\vec{\gamma} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$ .

Après avoir fait l'inventaire des forces appliquons la relation fondamentale de la dynamique à ce parallélépipède rectangle. On écrira donc :

$$\vec{F} + \vec{P} = dm\vec{\gamma} \quad (17)$$

En remarquant que l'on peut négliger le poids devant la résultante des forces causant les contraintes et en projetant l'équation (17) sur les axes de coordonnées on obtient :

→ Suivant l'axe des  $x$  :

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy dz \quad (18)$$

En divisant les 2 membres de l'équation (18) par  $dx dy dz$ , on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (19)$$

En utilisant la loi de Hooke (équation 12) en conjonction avec les équations (8), (9) et (11), on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Soit finalement :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21)$$

$$\text{Où } \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

→ Suivant l'axe des  $y$  :

On trouvera de manière similaire :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (22)$$

→ Suivant l'axe des  $z$  :

Là aussi on trouvera :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (23)$$

En différenciant les équations (21), (22) et (23) respectivement par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ , on obtient :

$$(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right) + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (24)$$

Soit :

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (25)$$

Que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\nabla^2 \Delta = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (26)$$

$$\text{Avec } \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

En soustrayant la dérivée de l'équation (22) par rapport à  $z$  de la dérivée de l'équation (23) para rapport à  $y$ , on obtient :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (27)$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = \nabla^2 \theta_x \quad (28)$$

$$\text{Avec } \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

De même on trouve en procédant de la même façon des résultats similaires pour  $\theta_y$  et  $\theta_z$ . Ces équations constituent des formes différentes de **l'équation d'onde** (26) dite aussi (**équation des cordes vibrantes**) et qui s'écrit souvent sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (28)$$

### 5.2.2. Solutions de l'équation d'onde

#### → Solution pour les ondes planes

Considérons le cas où  $\psi$  n'est fonction que de  $x$  et de  $t$ . Dans ce cas l'équation (28) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (29)$$

Cette équation est très connue en mathématiques et porte le nom de l'équation de d'Alembert.

Pour la résolution de l'équation (29) on va effectuer le changement de variable suivant :

Au lieu de  $x$  et  $t$  on va considérer les variable  $p = x - Vt$  et  $q = x + Vt$ . Dans ce cas, le calcul se fera comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (30)$$

Soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} = g(p, q) \quad (31)$$

La dérivée seconde de  $\psi$  par rapport à  $x$  s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} g(p, q) = \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial q} \quad (32)$$

Soit, en remplaçant  $g(p, q)$  par son expression donnée par l'équation (32) :

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + \frac{\partial \psi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{\partial \psi}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} \quad (33)$$

De même pour t, nous aurons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (34)$$

Soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -V \frac{\partial \psi}{\partial p} + V \frac{\partial \psi}{\partial q} = V \left( -\frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) = h(p, q) \quad (35)$$

La dérivée seconde de  $\psi$  par rapport à t s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = V \left( -\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial q} \right) \quad (36)$$

Soit en remplaçant  $h(p, q)$  par son expression donnée par l'équation (35) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial q \partial p} \right) = V^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} \right) \quad (37)$$

Tenant en compte les équations (29, 33 et 37), on voit que l'équation d'onde (39) se réduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 0 \quad (38)$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) = G(q) \quad (39)$$

$$\psi(p, q) = \int G(q) dq \quad (40)$$

Cela veut dire que la primitive de toute fonction  $G(q)$  est solution. Cette primitive est elle-même fonction de  $q$ , dont une solution particulière est  $f_2(q)$ . La solution générale aura donc la forme  $f_2(q) + f_1(p)$ . Tenant en compte le changement de variable utilisé, la solution générale de l'équation de d'Alembert, qui porte elle aussi le nom de solution de d'Alembert, se présentera sous la forme, dont nous devons d'exclure les points où les dérivées secondes n'existent pas.

$$\psi(x, t) = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) \quad (41)$$

De l'équation (41) on peut voir que toute fonction de  $(x - Vt)$  ou de  $(x + Vt)$  est solution du problème.

Exemples :

$$\psi(x, t) = \sin(x - Vt)$$

$$\psi(x, t) = e^{k(x - Vt)}$$

$$\psi(x, t) = \sin(x + Vt)$$

$$\psi(x, t) = (x - Vt)^5$$

$$\psi(x, t) = \sin(x + Vt)$$

$$\psi(x, t) = e^{k(x + Vt)}$$

Ce sont les conditions aux limites qui déterminent la solution appropriée au problème posé.

Une onde est définie comme une perturbation qui se propage au sein d'un milieu donné. Cette perturbation  $\psi$  peut être une dilatation quand  $\psi = \Delta$  ou une rotation lorsque  $\psi = \theta_x$  et la perturbation se propage le long de l'axe des  $x$ .

**Interprétation :**

Sur le plan physique la fonction  $f_1(x-Vt)$  traduit la propagation de l'onde dans le sens des  $x$  positifs tandis que  $f_1(x+Vt)$  traduit la propagation de la même onde dans le sens des  $x$  négatifs. En effet on peut écrire cette dernière comme suit :

$$f_1(x+Vt) = f_2(-(-x-Vt)) = f_3(-x-Vt) \tag{42}$$

Qui est bien une onde se propageant dans le sens des  $(-x)$  positifs c'est-à-dire des  $x$  négatifs. Dans l'un et l'autre sens la propagation de l'onde se fait à la vitesse  $V$ .

**Démonstration**

Considérons le signal ci-dessous (Figure 7), représentant une onde acoustique et atteignant le point  $P_0$  d'abscisse  $x_0$  à l'instant  $t_0$  ; la valeur de la perturbation en ce point est  $\psi_0 = f(x_0 - Vt_0)$ . Cette même onde atteindra le point  $P_1$  d'abscisse  $(x_1 = x_0 + \Delta x)$ , à l'instant  $(t_1 = t_0 + \Delta t)$  ; la valeur de la perturbation est alors  $\psi_1 = f(x_0 + \Delta x - V(t_0 + \Delta t))$ . En supposant que le signal de l'onde se propage sans déformation (sans atténuation), alors les perturbations se doivent d'être égales. Nous aurons alors :

$$\psi_0 = \psi_1 \tag{43}$$

Soit :

$$x_0 - Vt_0 = x_0 + \Delta x - V(t_0 + \Delta t) \Leftrightarrow V = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{44}$$

Ce qui montre bien que  $V$  est la vitesse de propagation de la perturbation.

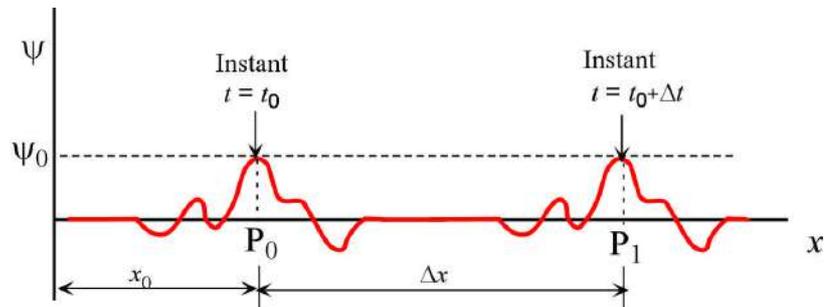


Figure 7. Vitesse de propagation d'une onde

Comme la valeur de  $\psi$  est indépendante de  $y$  et de  $z$ , la perturbation se doit d'être la même en tout point d'un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ . On appelle **onde plane** ce type d'onde.

On appelle phase la quantité  $(x - Vt)$  ou  $(x + Vt)$ . Les surfaces sur lesquelles le mouvement de l'onde est le même c'est-à-dire les surfaces sur lesquelles la phase conserve la même valeur, sont appelés **fronts d'onde**. Dans le cas de la figure présente, les fronts d'onde sont des plans perpendiculaires à l'axe des  $x$ . Le front d'onde est toujours perpendiculaire à la direction de propagation. On appelle **rayon** la ligne selon laquelle se propage l'énergie transportée par l'onde.

Dans le cas où la direction de propagation d'une onde plane n'est confondue avec aucun des axes de coordonnées, c'est-à-dire que l'onde se déplace le long d'une droite passant par O et de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}(l, m, n)$  (Figure 8).

La distance  $x'$  d'un point  $P$  quelconque de la droite considéré, à l'origine  $O$  est donnée par  $x' = lx + my + nz$  ( $x, y$  et  $z$  sont les coordonnées du point  $P$  dans le système de référence).

Dans ce cas l'expression donnant la perturbation  $\psi$  est donnée par :

$$\psi = f_1(lx + my + nz - Vt) + f_2(lx + my + nz + Vt) \quad (45)$$

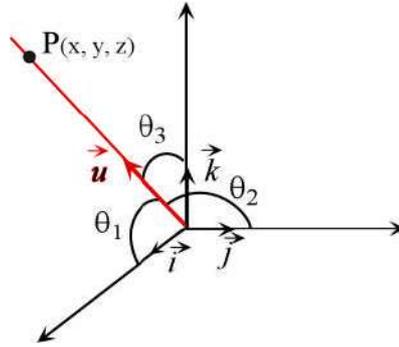


Figure 8. Propagation d'une onde suivant une direction oblique

### → Solution pour les ondes sphériques

Les ondes sphériques sont des ondes dont les fronts d'onde sont des sphères concentriques. L'équation (28) exprimée en coordonnées sphériques donnera :

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (46)$$

Dans un milieu homogène et isotrope, la propagation de l'onde ne dépendra que de variables  $r$  et  $t$ , l'équation s'écrira alors :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (47)$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - Vt) + \frac{1}{r} f_2(r + Vt) \quad (48)$$

Le premier terme de la solution indique une onde en expansion à partir du centre et le deuxième une onde en compression vers le même centre.

Pour  $r$  et  $t$  fixes  $r - Vt$  et donc sont constants. L'onde a donc la même valeur en tout point d'une sphère de rayon  $r$ . les fronts d'onde sont dans ce cas des sphères et les rayons sont matérialisés par toutes les demi-droites émanant du centre des sphères concentriques.

### Remarque

Très loin du centre les fronts d'onde sphériques peuvent être considérés comme étant plans (Figure 9). En effet si l'on considère la distance  $OQ$  très grande (l'onde progresse) les écarts  $PP'$  et  $RR'$  peuvent être considérés comme négligeable. L'approximation reste aussi valable au voisinage du point  $Q$ .

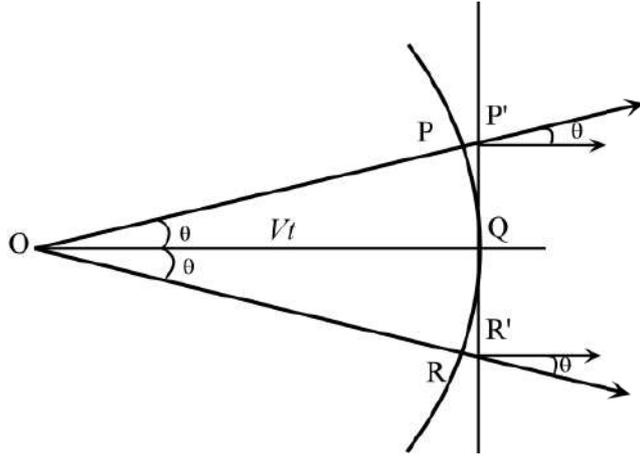


Figure 9. Approximation d'une onde sphérique par une onde plane.

### 5.2.3. Ondes harmoniques

Les équations (41, 45 et 48) donnant les solutions de l'équation d'onde donnent juste la forme de celles-ci, mais ne décrivent pas l'état vibratoire des particules que l'onde affecte. Pour ce faire, l'on doit chercher à savoir les déformations d'un point fixe en fonction du temps.

La forme sinusoidale constitue la solution la plus simple à décrire l'état vibratoire des particules, on parle alors d'**ondes harmoniques**. Celles-ci s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}\psi &= A \cos[2\pi k(x - Vt)] \\ \psi &= A \sin[2\pi k(lx + my + nz - Vt)] \\ \psi &= \frac{A}{r} \cos[2\pi k(r + Vt)]\end{aligned}\quad (49)$$

On voit bien que les valeurs de  $\psi$  varient entre  $-A$  et  $+A$  pour les ondes planes et entre  $-\frac{A}{r}$  et  $+\frac{A}{r}$  pour l'onde sphérique. L'amplitude dans l'un et l'autre cas est respectivement  $A$  et  $\frac{A}{r}$  ( $A$  étant positif).

#### **Longueur d'onde**

Dans chacune des équations (49) augmentons la variable spatiale de la quantité  $\frac{1}{k}$  pour une même valeur de la variable temps  $t$  ; l'expression obtenue de  $\psi$  est dans l'ordre :

$$\begin{aligned}\psi &= A \cos\left[2\pi k\left(x + \frac{1}{k} - Vt\right)\right] = A \cos[2\pi k(x - Vt) + 2\pi] \\ \psi &= A \sin\left[2\pi k\left(lx + my + nz + \frac{1}{k} - Vt\right)\right] = \psi = A \sin[2\pi k(lx + my + nz - Vt) + 2\pi] \\ \psi &= \frac{A}{r} \cos\left[2\pi k\left(r + \frac{1}{k} + Vt\right)\right] = \psi = \frac{A}{r} \cos[2\pi k(r + Vt) + 2\pi]\end{aligned}\quad (50)$$

Soit exactement les mêmes quantités que celles données par les équations (49) puisque  $2\pi$  constitue la période des fonctions sinus et cosinus.

La quantité  $\frac{1}{k}$  est appelée longueur d'onde, et notée  $\lambda$ . La quantité  $k$  est dite nombre d'onde.

### **Période et fréquence**

De même si l'on fixe la variable spatiales dans les équations (49) et l'on fait varier le temps, la valeur de  $\psi$  demeure constante si l'on augmente la variable temporelle de la quantité  $T$  telle que  $T = \frac{1}{kV} = \frac{\lambda}{V}$ . La quantité  $T$  est appelée **période**.

La **fréquence** définie comme étant le nombre de fois que se répète un signal durant la période  $T$  est donnée par :  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{V}{\lambda}$ .

On définit aussi la **fréquence angulaire** par  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi kV$ . Dans ce cas les équations (49) s'écriront :

$$\begin{aligned}\psi &= A \cos \left[ \omega \left( \frac{x}{V} - t \right) \right] = \\ \psi &= A \sin \left[ \omega \left( \frac{lx + my + nz}{V} - t \right) \right] \\ \psi &= \frac{A}{r} \cos \left[ \omega \left( \frac{r}{V} + t \right) \right]\end{aligned}\tag{51}$$

### 5.2.3. Ondes P et S

Dans l'équation (28) la variable dépendante  $\psi$  peut être une dilatation  $\Delta$  ou une rotation  $\theta_x, \theta_y$  ou  $\theta_z$ , ce qui veut dire qu'un milieu peut être le siège des 2 types d'onde.

Intéressons-nous à la vitesse de propagation de ces deux types d'onde.

Lorsque l'onde implique une dilatation du milieu, l'équation régissant le phénomène de propagation (équation 26) permet de déduire la vitesse de propagation de l'onde. Celle-ci est donnée par :

$$V^2 = \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\tag{52}$$

Soit

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\tag{53}$$

Dans l'autre cas, c'est-à-dire, lorsque l'onde est une rotation du milieu, l'équation (28) permet de déduire la vitesse de propagation du phénomène. Celle-ci est donnée alors par :

$$V^2 = \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}\tag{54}$$

Soit :

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\tag{55}$$

Le premier type d'onde est connu sous les noms **d'onde de compression** ou **longitudinale** ou de **dilatation** ou **irrotationnelle** ou **P**. cette dernière appellation provient du fait que ces ondes sont les **P**remières à être recueillies sur les sismogrammes (enregistrements des tremblements de terre). Quant au deuxième type, il est connu sous les noms **d'onde de cisaillement**, **transversale**, **rotationnelle** ou **S** (car recueillie en **S**econd sur les sismogrammes). On peut s'en rendre compte en comparant les vitesses des ondes P et S telles qu'elles sont exprimées

par les équations (53) et (55) et en remarquant que les constantes élastiques sont positives. En effet :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{2 + \frac{\lambda}{\mu}} > 1 \quad (56)$$

Voyons maintenant dans quel rapport varie la vitesse de l'onde S par rapport à la vitesse de l'onde P.

$$\gamma^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{0.5 - \sigma}{1 - \sigma} \quad (57)$$

Quand  $\sigma$  varie de 0 à 0.5  $\gamma$  varie de 0 à  $\sqrt{0.5} = 0.70$ . Ce qui veut dire que la vitesse des ondes S est dans le meilleur des cas constituée 70% de la vitesse des ondes P.

Les ondes S ne se propagent pas dans les fluides car  $\mu = 0$  et en vertu de (55) la vitesse de propagation est nulle.

### → Nature du mouvement du milieu dans le cas d'une onde P

Soit une onde P sphérique (équation 47) et traçons des fronts d'onde espacés du quart de la longueur d'onde  $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$  en y représentant le sens du mouvement du milieu (Figure 10). Le

temps est choisi de manière que  $\frac{V}{\lambda}t = n, n \in \mathbb{N}$ . Les flèches représentent le sens du mouvement du milieu sur les fronts d'onde. Le milieu subit une compression maximale sur le front d'onde B (la dilatation est minimale) et une compression minimale sur le front d'onde D (la dilatation est maximale).

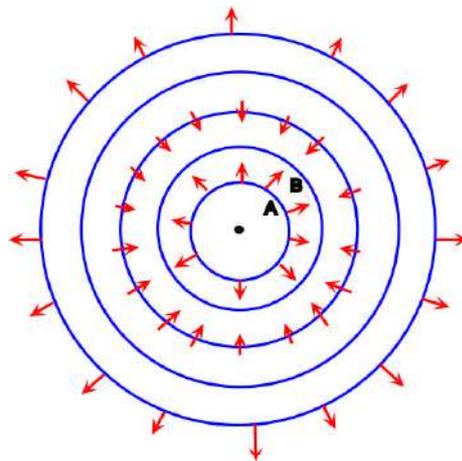


Figure 10. Fronts d'onde et sens de déplacement du milieu

Dans le cas des ondes P Les déplacements sont longitudinaux, ce qui explique l'appellation donnée à ce type d'onde.

### → Nature du mouvement du milieu dans le cas d'une onde S

Soit une onde S plane et considérons le cas d'une rotation  $\theta_z$ , autour de l'axe z, et fonction de x et de t seulement et se propageant le long de l'axe des x. L'équation régissant la propagation de l'onde dans ce cas est donnée par :

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} \quad (58)$$

L'angle  $\theta_z$  est donné par :

$$\theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (59)$$

Le mouvement se traduit donc par un déplacement  $v$  dans la direction de l'axe des  $y$ ,  $v$  étant fonction de  $x$  et de  $t$ . Comme  $v$  est indépendant de  $y$  et de  $z$ , le mouvement est le même dans un plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ . Il s'agit donc d'une onde S se propageant selon l'axe des  $x$ .

Connaissant la solution de l'équation d'onde (58) et en vertu de (59), on peut donner la forme générale de  $v$  par :

$$v = f(x - \beta t) + g(x + \beta t) \quad (60)$$

Comme pour les ondes harmoniques on peut imaginer l'état vibratoire d'un point P en exprimant par exemple  $v$  sous forme d'une fonction sinusoïdale (équation 49).

Quand l'onde S arrive en P (Figure 11), elle provoque la rotation du milieu à proximité du point P autour de l'axe Z'Z'' (parallèle à l'axe des  $z$ ) selon un angle  $\varepsilon$  très petit si bien que l'on peut considérer les points P' et P'' se sont déplacés parallèlement à l'axe des  $y$  pour donner respectivement les points Q' et Q''.

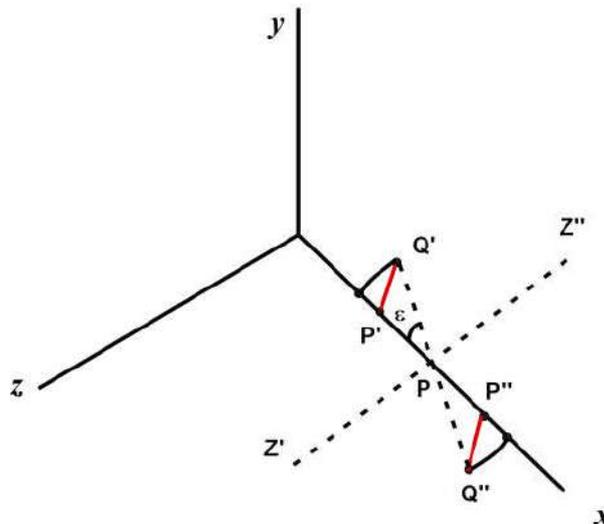


Figure 11. Mouvement au passage d'une onde S

### 5.2.3. Ondes de surface (Ondes de Rayleigh)

Ce sont des ondes qui se propagent à la surface du sol. Le mouvement des particules est limité au plan vertical passant par la direction de propagation. Pendant le passage de l'onde la particule subit un mouvement elliptique (le grand axe de l'ellipse est vertical). Le mouvement de la particule sur l'ellipse est dit rétrograde car il est de sens opposé par rapport au sens de propagation de l'onde (Figure 12).

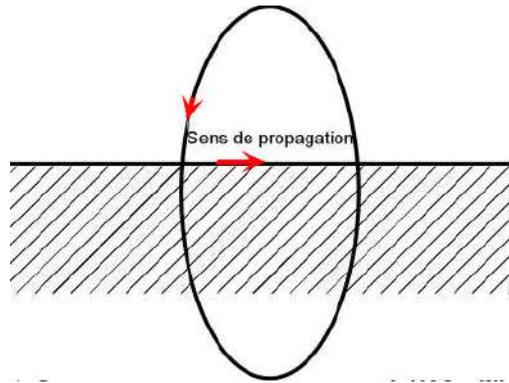


Figure 12. Mouvement au passage d'une onde de Rayleigh

### 5.2.3. Densité d'énergie, intensité et absorption

Considérons une onde  $P$  harmonique à symétrie sphérique, pour laquelle le déplacement radial, en un point de l'espace situé à la distance  $r$  de la source, est donné par :

$$u = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (61)$$

La vitesse de la particule est  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$

L'énergie cinétique d'une particule de volume  $d\tau$  est donnée par :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho d\tau \dot{u}^2 \quad (62)$$

L'énergie cinétique par unité de volume est donc :

$$\frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (63)$$

L'énergie cinétique varie entre 0 et sa valeur maximale  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$ .

La particule oscille ceci engendrera aussi, comme pour un ressort, une énergie potentielle qui se convertit en énergie cinétique, si bien que l'énergie totale demeure constante. L'énergie totale n'est autre que la valeur maximale de l'énergie cinétique. Nous écrivons donc l'énergie totale par unité de volume comme suit :

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho v^2 A^2 \quad (64)$$

On définit aussi l'intensité comme étant l'énergie par unité de surface normale à la direction de propagation de l'onde et par unité de temps. Pour cela considérons un cylindre élémentaire dont l'axe est parallèle à la direction de propagation de base  $\delta A$ , sa longueur est égale à la distance parcourue par l'onde pendant le laps de temps  $\delta t$ .

L'énergie contenue dans le cylindre est :  $EV \cdot \delta t \cdot \delta A$ , par conséquent l'intensité  $I$  est :

$$I = EV \quad (65)$$

Pour une onde harmonique :

$$I = \frac{1}{2} \rho V \omega^2 A^2 \quad (66)$$

L'intensité de l'énergie n'est pas constante et décroît à cause de la dispersion géométrique, de l'absorption par le milieu et des phénomènes aux interfaces. En première approximation on donne :

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (67)$$

Où  $I$  et  $I_0$  sont deux valeurs de l'intensité en deux points distants de  $x$ , et  $\alpha$  est le coefficient d'absorption (à ne pas confondre avec la vitesse des ondes  $P$ ).

#### 5.2.4. Réflexion et Réfraction

Soit un front d'onde plan  $AB$  incident sur une surface plane (Figure 13).

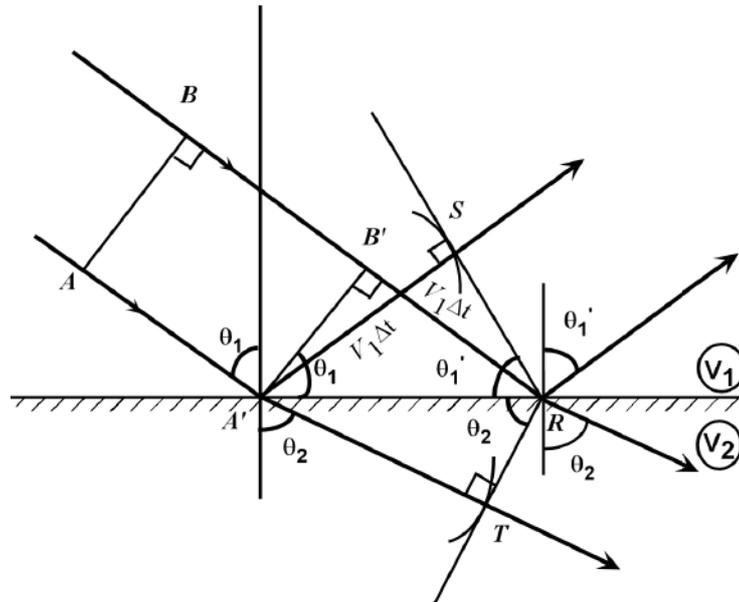


Figure 13. Réflexion et réfraction d'une onde plane

$AB$  parvient en  $A'B'$  lorsque  $A$  arrive à la surface. A cet instant l'énergie se trouvant en  $B'$  continue à parcourir la distance  $B'R$  avant d'atteindre la surface. La vitesse de propagation de l'onde dans le milieu 1 étant  $V$ , la distance  $B'R$  est égale à  $V_1\Delta t$ , où  $\Delta t$  est l'intervalle de temps séparant l'arrivée de l'onde en  $A'$  et en  $R$ . Pendant cette durée l'énergie arrivant en  $A'$  sera propagé, en vertu du principe de Huygens, soit vers le haut à une distance  $V_1\Delta t$  soit vers le bas dans le milieu 2 à une distance  $V_2\Delta t$ .

En traçant des arcs de cercle de centre  $A'$  et de rayons  $V_1\Delta t$  et  $V_2\Delta t$  et en traçant les tangentes menées de  $R$  à ces arcs, nous obtenons la position des nouveaux fronts d'onde  $RS$  et  $RT$  dans les milieux 1 (supérieur) et 2 (inférieur). L'angle en  $S$  est droit et  $A'S = V_1\Delta t = B'R$ . Les triangles  $A'B'R$  et  $A'SR$  sont égaux, il en résulte que :

$$\theta_1 = \theta_1' \quad (68)$$

C'est-à-dire que l'angle d'incidence  $\theta_1$  est égale à l'angle de réflexion  $\theta_1'$ . C'est **la loi de la réflexion**

Pour l'onde réfractée, l'angle  $T$  est droit et nous avons :

$$\begin{aligned} V_2 \Delta t &= A' R \sin \theta_2 \\ V_1 \Delta t &= A' R \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (69)$$

D'où :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \quad (70)$$

### 5.3. Application de la propagation des ondes à la Géologie : La sismique

Nous allons voir en TP comment on peut mettre à profit la propriété des ondes à se réfracter pour déterminer les structures du sous-sol. Il est à noter que les applications de la propagation des ondes dans le sous-sol seront étudiées en 3<sup>ème</sup> Année de Licence.

-----FIN-----

## BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

**Comolet, R. Mécanique expérimentale des fluides, Tome 2 (Dynamique des fluides réels, Turbomachines), 4<sup>ème</sup> édition, Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1994.**

**Dubois, jacques. , Diament., Michel, Cogné, Jean-Pascal. Géophysique (Cours et exercices corrigés, 4<sup>ème</sup> édition), Dunod, Paris, 2011, 265 pp.**

**Lencastre, A. Hydraulique générale. Editions Eyrolles, Paris, 2004, 633pp.**

**Telford, W. M, Geldart, L. P, Sheriff, D. E et Keys, D. A. Prospection géophysique, Tome 3. ERG Editions, la barbannerie, F-78780 Maurecourt, 1989. Tirage provisoire.**

**Telford, W. M, Geldart, L. P, Sheriff, D. E et Keys, D. A. Prospection géophysique, Tome 1. ERG Editions, la barbannerie, F-78780 Maurecourt, 1984.**

**Telford, W. M, Geldart, L. P and Sheriff, D. E. Applied Geophysics Prospection géophysique, Second edition, Cambridge University Press, cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1990.**

**Lenoble, A. Mécanique des fluides, Laboratoire de Physique des matériaux (LPM), Université de Nancy, France, ???**

# Bon courage



## LIENS UTILES 🙌

### Visiter :

1. <https://biologie-maroc.com>

- Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. <https://biologie-maroc.com/shop/>

- Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
- Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
- Trouver des bourses et des écoles privées

3. <https://biologie-maroc.com/emploi/>

- Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
- Trouver des offres d'emploi et de stage

