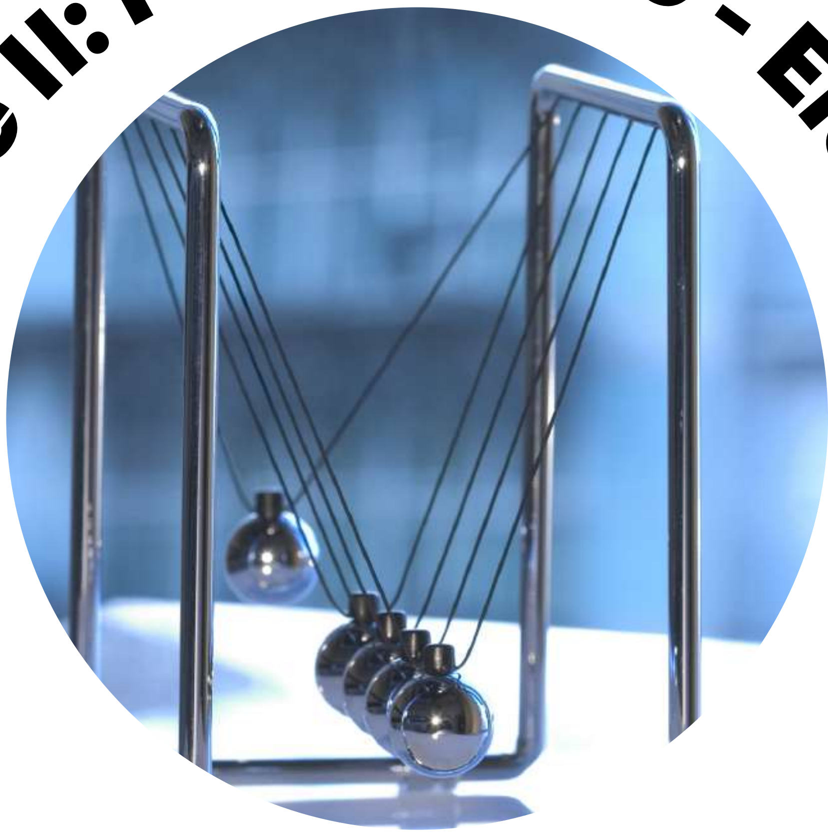
BIOLOGIE MAROC
www.biologie-maroc.com

# Physique II: Mécanique - Electricité



## SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

# Chapitre 1

# Calcul vectoriel

Il s'agit ici de réviser certaines notions quand aux calculs avec des vecteurs et des champs de vecteurs. On commence par deux définitions :

**Scalaire :** Un scalaire est une grandeur physique complètement définie par un chiffre. Ex : masse, température, énergie, etc.

**Vecteur :** Un vecteur est une grandeur physique caractérisée par un module et une orientation. Ex : force, vitesse, champ électrique, etc.

## 1.1 Vecteurs

Un vecteur est représenté graphiquement par une flèche dont la longueur est proportionnelle à sa grandeur. La flèche pointe dans le même sens que le vecteur. Dans les chapitres qui suivent, on représente un vecteur par une lettre ayant une flèche par dessus : $\vec{v}$.

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur ayant un module de 1. Par définition, un vecteur $\vec{A} = |A|\vec{u}$ où $|A|$ veut dire module (amplitude) du vecteur $\vec{A}$. Donc, le vecteur unitaire est défini selon :

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|A|} \tag{1.1}$$

On utilise aussi la notation $\hat{a}$ pour dénoter un vecteur unitaire. C'est cette notation qu'on utilisera dans le cours.

### 1.1.1 Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs est un autre vecteur. Graphiquement, on peut réaliser cette opération par la règle du parallélogramme, comme à la figure 1.1.

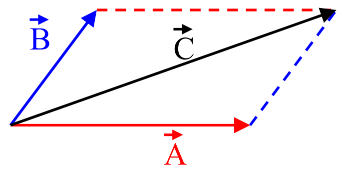



FIG. 1.1 – Somme de deux vecteurs.

### 1.1.2 Soustraction de vecteurs

La soustraction de deux vecteurs produit elle aussi un 3e vecteur. Dans ce cas-ci, on considère la soustraction comme la somme du premier vecteur avec le deuxième vecteur multiplié par -1.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.2}$$

Graphiquement, $-\vec{B}$ est obtenu en faisant une rotation de 180° de $\vec{B}$.

### 1.1.3 Multiplication par un scalaire

Un vecteur qui est multiplié par un scalaire change d'amplitude, mais pas de direction :

$$k\vec{A} = (k|A|)\hat{a} \tag{1.3}$$

### 1.1.4 Produit de vecteurs

Il y a deux produits de vecteurs : le produit scalaire et le produit vectoriel.

#### Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un scalaire donné par la relation suivante :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |A||B|\cos(\theta_{AB}) \tag{1.4}$$

où $\theta_{AB}$ est le plus petit angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Quelques propriétés du produit scalaire :
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = |A|^2$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Le produit scalaire peut être utilisé pour déterminer si deux vecteurs sont perpendiculaires ; dans ce cas, $\cos\theta_{AB} = 0$, et donc le produit scalaire est nul.

Aussi, si deux vecteurs sont parallèles, le produit scalaire est égal à la multiplication des modules :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \qquad \text{si} \qquad \vec{A} // \vec{B} \tag{1.5}$$

### Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un autre vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$. L'amplitude du résultat dépend de l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$. La définition du produit vectoriel est :

$$\vec{A} \times \vec{B} \equiv (|A||B| \sin(\theta_{AB}))\, \hat{a} \tag{1.6}$$

où $\theta_{AB}$ est le plus petit angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et $\hat{a}$ est normal (perpendiculaire) au plan formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, comme à la figure 1.2.

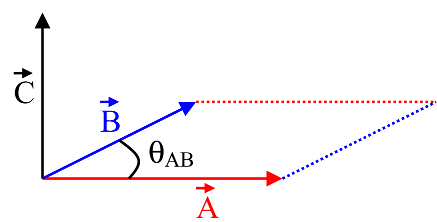



Fig. 1.2 – Produit vectoriel de deux vecteurs.

Quelques propriétés du produit vectoriel :
- $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

Le produit vectoriel peut être utilisé pour trouver un vecteur (unitaire) normal à un plan. Si on connaît 2 vecteurs de ce plan, on utilise le produit vectoriel pour trouver le vecteur normal.

On peut aussi vérifier si deux vecteurs sont parallèles : dans ce cas, $\sin\theta_{AB} = 0$, et donc le produit vectoriel est nul.

## 1.2 Systèmes de coordonnées orthogonaux

Un système de coordonnées orthogonal est un système de coordonnées où les trois surfaces (en 3D) qui définissent le système sont perpendiculaires l'une à l'autre. On utilisera les trois systèmes orthogonaux principaux dans ce cours, soit :

1. Système cartésien
2. Coordonnées cylindriques
3. Coordonnées sphériques

### 1.2.1 Coordonnées cartésiennes

Le point $P(x, y, z)$ dans les coordonnées cartésiennes représente l'intersection de 3 plans non-courbés. Les trois vecteurs de base sont $\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$ et $\hat{a}_z$.

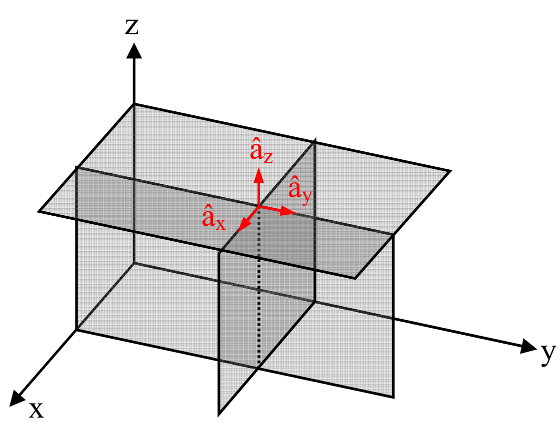



FIG. 1.3 – Système de coordonnées cartésien.

Un vecteur quelconque $\vec{A}$ est représenté dans les coordonnées cartésiennes selon :

$$\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \tag{1.7}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.8}$$

Le produit vectoriel est :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{a}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{a}_x \tag{1.10}$$

L'élément différentiel de longueur dans ce système de coordonnées est :

$$dl = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \tag{1.11}$$

Les éléments de surface sont :

$$ds_x = dydz \tag{1.12}$$
$$ds_y = dxdz \tag{1.13}$$
$$ds_z = dxdy \tag{1.14}$$

L'élément différentiel de volume est :

$$dv = dx\,dy\,dz \tag{1.15}$$

### 1.2.2 Coordonnées cylindriques

C'est le deuxième système de coordonnées en importance. Comme le nom l'indique, les surfaces définissent un cylindre. Les trois vecteurs de base sont $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\phi$ et $\hat{a}_z$.

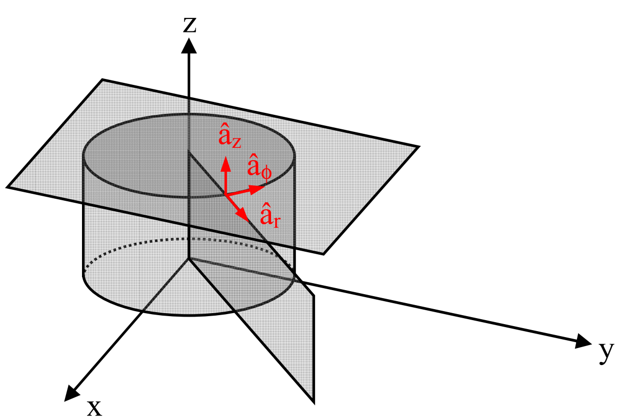



FIG. 1.4 – Système de coordonnées cylindrique.

Un vecteur quelconque $\vec{A}$ est représenté dans les coordonnées cylindriques selon :

$$\vec{A} = A_r\hat{a}_r + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z \tag{1.16}$$

L'élément différentiel de longueur dans ce système de coordonnées est :

$$dl = dr\hat{a}_r + rd\phi\,\hat{a}_\phi + dz\hat{a}_z \tag{1.17}$$

Les éléments de surface sont :

$$ds_r = rd\phi\, dz \tag{1.18}$$
$$ds_\phi = drdz \tag{1.19}$$
$$ds_z = rdrd\phi \tag{1.20}$$

L'élément différentiel de volume est :

$$dv = rdr\, d\phi\, dz \tag{1.21}$$

On peut passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes à l'aide de la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Pour transformer les variables :

$$x = r\cos\phi \tag{1.23}$$
$$y = r\sin\phi \tag{1.24}$$
$$z = z \tag{1.25}$$

avec les relations inverses suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.26}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.27}$$
$$z = z \tag{1.28}$$

### 1.2.3 Coordonnées sphériques

Les surfaces de ce système de coordonnées définissent une sphère. Les trois vecteurs de base sont $\hat{a}_R$, $\hat{a}_\theta$ et $\hat{a}_\phi$, selon la figure 1.5.

Un vecteur quelconque $\vec{A}$ est représenté dans les coordonnées cylindriques selon :

$$\vec{A} = A_R\hat{a}_R + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi \tag{1.29}$$

L'élément différentiel de longueur dans ce système de coordonnées est :

$$dl = dR\hat{a}_R + Rd\theta\,\hat{a}_\theta + R\sin\theta d\phi\,\hat{a}_\phi \tag{1.30}$$

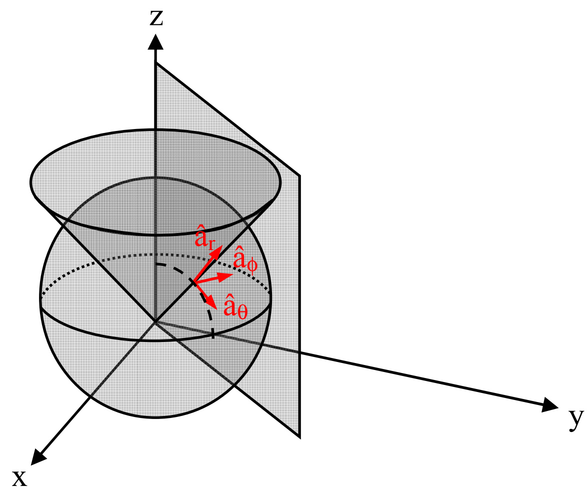



FIG. 1.5 – Système de coordonnées sphérique.

Les éléments de surface sont :

$$ds_R = R^2 \sin\theta d\theta\, d\phi \quad (1.31)$$

$$ds_\theta = R \sin\theta dR d\phi \quad (1.32)$$

$$ds_\phi = R dR d\theta \quad (1.33)$$

L'élément différentiel de volume est :

$$dv = R^2 \sin\theta dR\, d\theta\, d\phi \quad (1.34)$$

Pour transformer les variables :

$$x = R \sin\theta \cos\phi \quad (1.35)$$

$$y = R \sin\theta \sin\phi \quad (1.36)$$

$$z = R \cos\theta \quad (1.37)$$

avec les relations inverses suivantes :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.38)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (1.39)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.40)$$

Pour convertir des coordonnées sphériques aux coordonnées cylindriques, on utilise les relations suivantes :

$$r = R \sin\theta \quad (1.41)$$

$$\phi = \phi \quad (1.42)$$

$$z = R \cos\theta \quad (1.43)$$

## 1.3 Gradient d'un champ scalaire

On considère une fonction scalaire $V$ dans l'espace où $(u_1, u_2, u_3)$ sont ses coordonnées. Cette fonction peut représenter, par exemple, la température à chaque point dans une pièce, ou l'altitude d'une région montagneuse, ou le potentiel électrique dans l'espace. La valeur de $V$ dépend de la position du point. On cherche maintenant un vecteur qui pointe vers l'augmentation maximale de $V$ dans l'espace.

Une autre définition du gradient : ça donne la pente maximale de la fonction, et ça pointe vers cette pente maximale. Un exemple est donné à la figure 1.6, pour une fonction $\phi(x, y) = \sin(x)\sin(y)$, où $-3 < x < 3$ et $-3 < y < 3$.

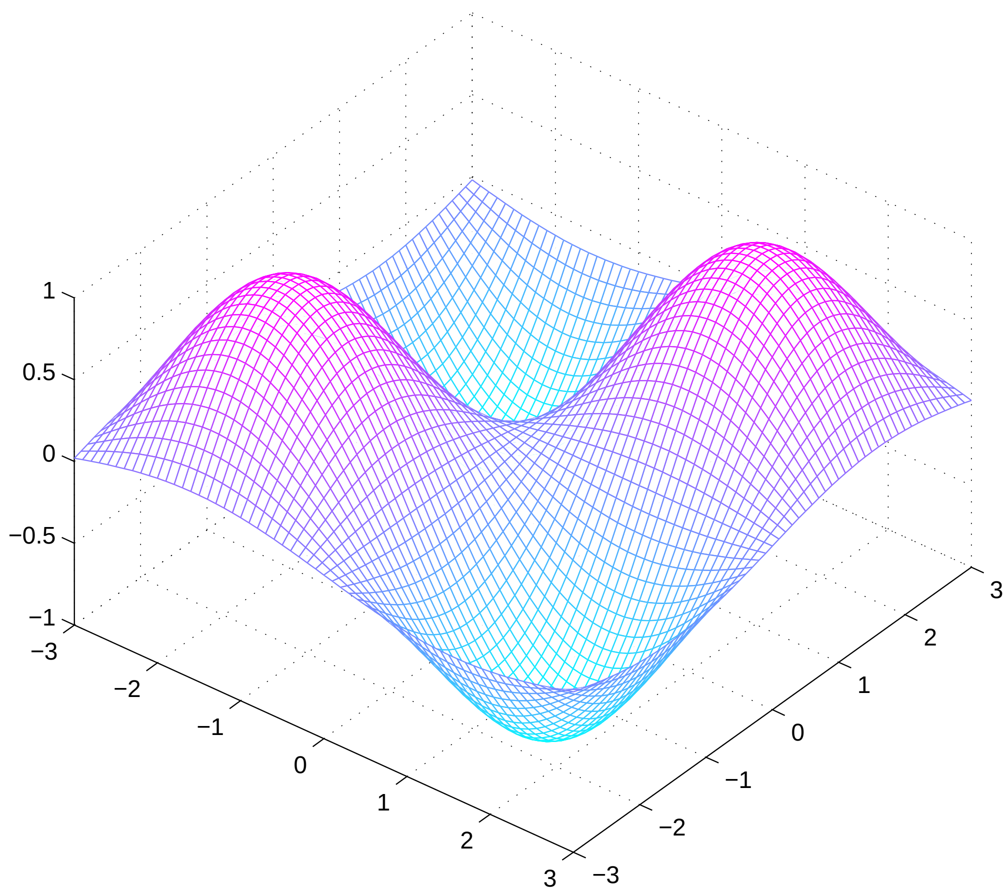



FIG. 1.6 – Surface en 3D.

Le gradient de cette fonction est donné à la figure 1.7.

Si on combine les deux graphes l'un avec l'autre, avec une vue du dessus, on obtient le

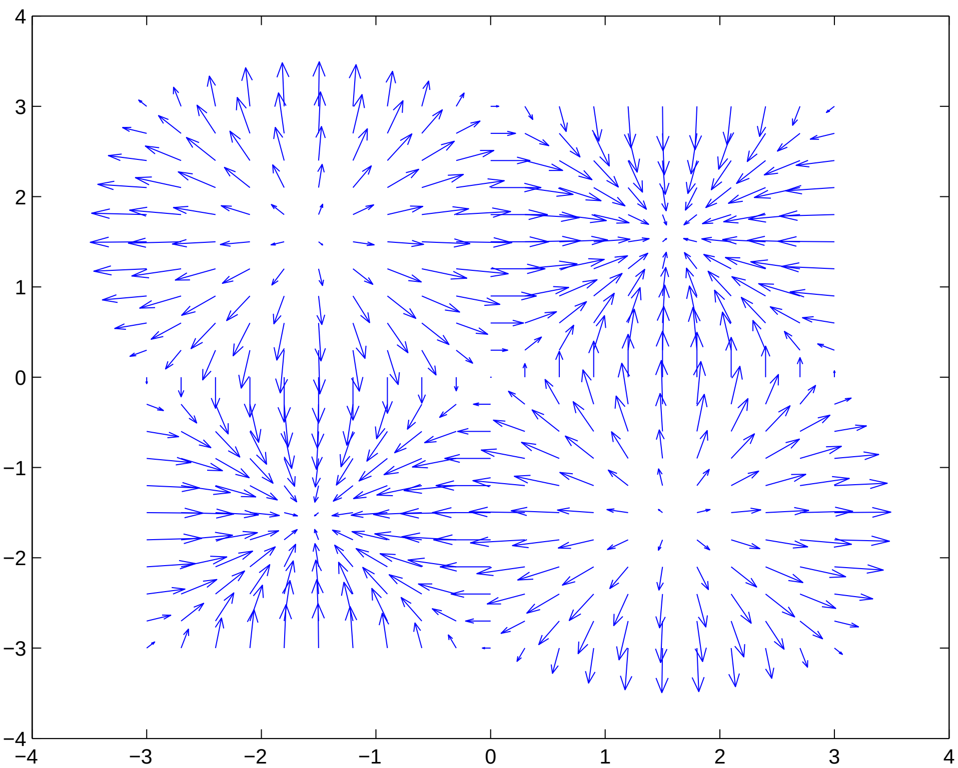



FIG. 1.7 – Gradient d'une fonction $\phi(x, y)$.

graphique de la figure 1.8.

Le gradient d'un champ scalaire $V$ est donné par **grad** $V$. On utilise une autre représentation, c'est $\nabla V$ ; on utilisera cette représentation pour le reste du cours. Le symbole $\nabla$ s'appelle "del" ou "nabla".

En coordonnées cartésiennes, le gradient d'une fonction scalaire $V$ est :

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{a}_z \tag{1.44}$$

D'une façon générale, le gradient est défini selon :

$$\nabla = \frac{\partial}{h_1 \partial u_1}\,\hat{a}_{u_1} + \frac{\partial}{h_2 \partial u_2}\,\hat{a}_{u_2} + \frac{\partial}{h_3 \partial u_3}\,\hat{a}_{u_3} \tag{1.45}$$

où les coefficients sont donnés dans le tableau 1.1.

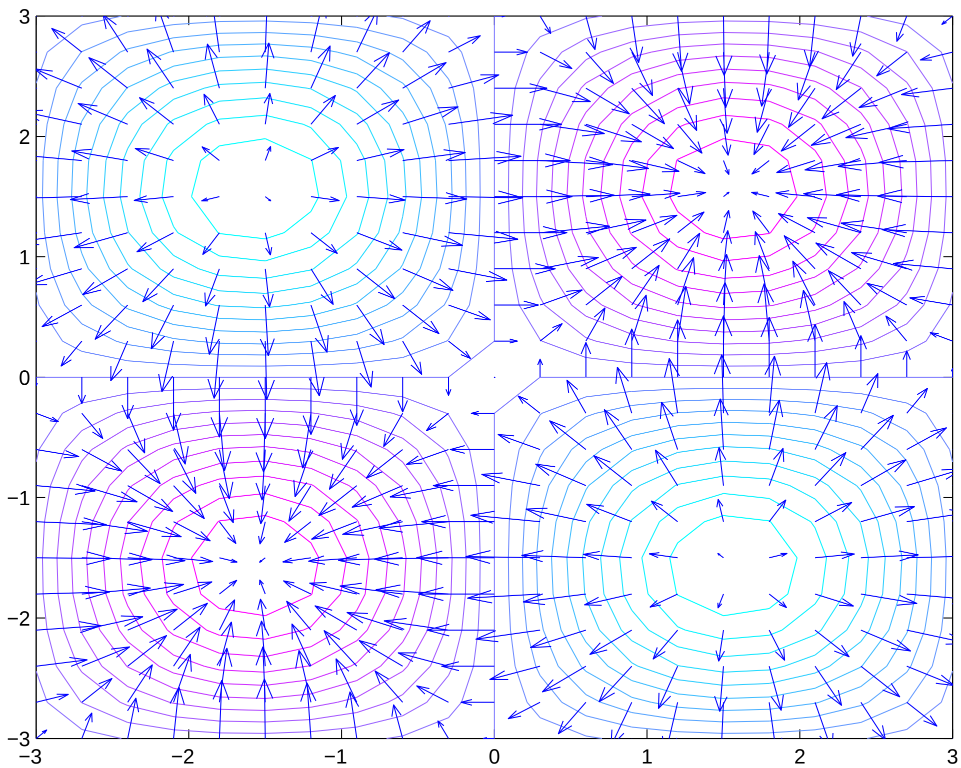



FIG. 1.8 – Gradient d'une fonction $\phi(x, y)$.

| | Cartésien | Cylindrique | Sphérique |
|---|---|---|---|
| $\hat{a}_{u_1}$ | $\hat{a}_x$ | $\hat{a}_r$ | $\hat{a}_R$ |
| $\hat{a}_{u_2}$ | $\hat{a}_y$ | $\hat{a}_\phi$ | $\hat{a}_\theta$ |
| $\hat{a}_{u_3}$ | $\hat{a}_z$ | $\hat{a}_z$ | $\hat{a}_\phi$ |
| $h_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $h_2$ | 1 | $r$ | $R$ |
| $h_3$ | 1 | 1 | $R \sin\theta$ |

TAB. 1.1 – Coefficients des systèmes de coordonnées.

## 1.4 Divergence d'un champ de vecteurs

La divergence est un opérateur utilisé pour caractériser un champ de vecteurs. La valeur de la divergence d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à un point $P$ est une mesure du rythme auquel le champ s'étend à partir de $P$. C'est un scalaire. L'expansion du champ est donnée par le flux à travers le côté extérieur d'une petite surface délimitant un voisinage de $P$. Ainsi, la divergence de $\vec{A}$ à un point $P$ est, par exemple, la limite du flux, par unité de volume, à travers le côté extérieur de sphères de plus en plus petites, centrées à $P$. La divergence de $\vec{A}$ est donnée par div $\vec{A}$ ou $\nabla \cdot \vec{A}$.

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta v} \tag{1.46}$$

où $\oint_s$ est une double intégrale sur une surface fermée et $d\vec{s}$ est l'élément différentiel de surface.

$$d\vec{s} = ds\ \hat{a}_n \tag{1.47}$$

où $\hat{a}_n$ est un vecteur normal à la surface.

La divergence est une mesure du flux à un point donné. En termes de champ électrique, une divergence positive indique la présence d'une source de flux (charge positive), tandis qu'une divergence négative indique un "puits" (une charge négative).

En coordonnées cartésiennes, la divergence est donnée par :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.48}$$

Pour n'importe quelles coordonnées orthogonales,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right] \tag{1.49}$$

où les coefficients sont donnés par le tableau 1.1.

Un champ de vecteurs $\vec{A}$ où $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ est dit solénoïdal.

Exemple 1

Calculer la divergence du champ de vecteurs

$$\vec{F} = xy\ \hat{a}_x + (y^2 - z^2)\ \hat{a}_y + yz\ \hat{a}_z$$

Par définition,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\\ &= y + 2y + y\\ &= 4y\end{aligned}$$

## 1.5 Théorème de la divergence

Le théorème de la divergence est un outil qui permet de transformer une intégrale sur un volume à une intégrale sur une surface fermée. Le théorème exprime : "l'intégrale volumique de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est égal au flux net total du vecteur à travers la surface limitant le volume".

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{A}) dv = \oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{1.50}$$

où $d\vec{s}$ est toujours selon la normale à la surface.

Le théorème de la divergence est une expression mathématique du fait physique que, en l'absence de la création ou destruction de la matière, la densité dans une région de l'espace peut seulement changer s'il y a de la matière qui entre ou qui sort de la région.

La démonstration de ce théorème est dans le manuel, pour les intéressés.

## 1.6 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Un deuxième opérateur utilisé pour caractériser un champ de vecteurs est le rotationnel. Le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à un point $P$ indique dans quelle mesure $\vec{A}$ tourbillonne autour de $P$. Par définition :

$$\mathbf{rot}\, \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left( \oint_c \vec{A} d\vec{l} \right) \tag{1.51}$$

L'amplitude du rotationnel est une mesure de la quantité de rotation, et l'orientation du rotationnel pointe dans la direction où la rotation est maximale.

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel est donné par :

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.52}$$

$$= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z \tag{1.53}$$

Pour tous les systèmes de coordonnées orthogonaux :

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{a}_{u_1} & h_2 \hat{a}_{u_2} & h_3 \hat{a}_{u_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{1.54}$$

où les coefficients sont donnés dans le tableau 1.1.

Un champ de vecteurs $\vec{A}$ est dit *conservateur* si $\nabla \times \vec{A} = 0$.

## 1.7 Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes est semblable au théorème de la divergence. Il permet de transformer une intégrale de surface à une intégrale de contour. Le théorème est ainsi : “l’intégrale de surface du rotationnel d’un champ de vecteurs pour une surface ouverte est égale à l’intégrale fermée le long du contour fermé $C$ délimitant la surface”.

$$\int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \tag{1.55}$$

Si la surface est fermée :

$$\int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = 0 \tag{1.56}$$

La démonstration de ce théorème est dans le manuel, pour les intéressés.

## 1.8 Identités

Certaines identités comprenant l’opérateur $\nabla$ :

$$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V \tag{1.57}$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \tag{1.58}$$
$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B} \tag{1.59}$$
$$\nabla \cdot (U\vec{A}) = (\nabla U) \cdot \vec{A} + U(\nabla \cdot \vec{A}) \tag{1.60}$$
$$\nabla \times (U\vec{A}) = (\nabla U) \times \vec{A} + U(\nabla \times \vec{A}) \tag{1.61}$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \tag{1.62}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{1.63}$$
$$\nabla \times (\nabla U) = 0 \tag{1.64}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{1.65}$$

# Bon courage

## LIENS UTILES ☝

# Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage