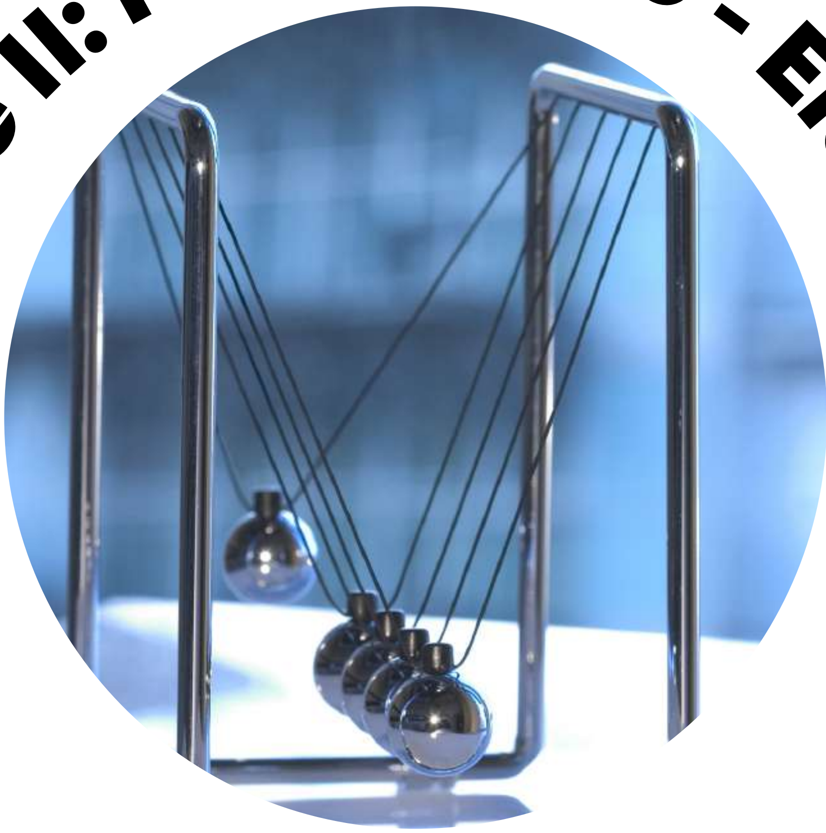
BIOLOGIE MAROC
www.biologie-maroc.com

Physique II: Mécanique - Electricité



SCIENCES DE LA
VIE ET DE LA TERRE

Vecteurs

II. Systèmes de coordonnées

Ghislaine Godinaud

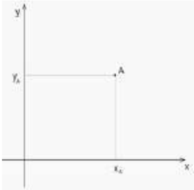
2 octobre 2012

1. Repérage d'un point
   - Repérage d'un point du plan
   - Repérage d'un point dans l'espace
2. Repères locaux
   - Définition et repère local cartésien
   - Repère local polaire
   - Repère local cylindrique
   - Repère local sphérique
3. Dérivées des vecteurs de base locaux
   - Polaires - Cylindriques - Sphériques
4. Déplacement élementaire d'un point
   - En cartésien, polaire , cylindrique et sphérique

Repérage d'un point du plan

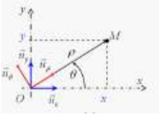
Repérer un point de l'espace (ou du plan), c'est utiliser un moyen de désigner ce point de manière non ambiguë. Cette description se fait à l'aide de 3 nombres (2 pour le plan) qui sont les coordonnées du point. Suivant le mode de repérage utilisé, on parle de coordonnées cartésiennes, polaires, sphériques, cylindriques...

Coordonnées cartésiennes.



On munit le plan d'un repère de centre O et d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$. On repère le point M par ses coordonnées cartésiennes (x, y) comme suit : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{i}$

Coordonnées polaires.



Les coordonnées polaires d'un point M du plan orienté d'origine O sont :

- La longueur du segment OM correspond à **la coordonnée radiale $\rho = OM$**
- L'angle est **la coordonnée angulaire**. Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses (Ox) .

Remarque : Contrairement aux coordonnées cartésiennes x et y, les coordonnées polaires ρ et θ ne sont pas de même nature. La coordonnée radiale a la dimension d'une longueur comme x et y. La coordonnée angulaire θ s'exprime en radian (unité d'angle sans dimension).

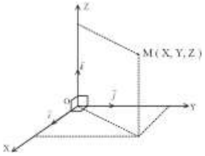
Relation avec les coordonnées cartésiennes. Désignons par (x, y) les coordonnées cartésiennes du point M et par (ρ, θ) ses coordonnées polaires. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est donné par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

Repérage d'un point dans l'espace

Selon le même principe que pour le plan, on peut considérer un point de l'espace comme l'intersection de trois plans (coordonnées cartésiennes) ou trois surfaces (coordonnées curvilignes).

Coordonnées cartésiennes.



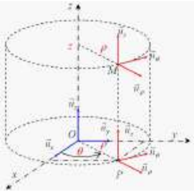
On munit l'espace d'un repère de centre O et d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On repère le point M par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{i} + z\,\overrightarrow{k}$$

Définition. Une **courbe coordonnée** est l'ensemble des points obtenus en fixant deux des coordonnées et en laissant libre la troisième.

Nous allons voir les exemples les plus classiques de coordonnées curvilignes orthogonales

Coordonnées cylindriques.



Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques, il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan (xOy)) par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne (appelée la cote).
La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z. La projection P du point M dans le plan (Oxy) est repérée en coordonnées polaires (ρ, θ). On a les relations suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{u_\rho} + z\vec{u_z}$$

$$||\overrightarrow{OM}|| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

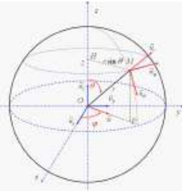
Relation avec les coordonnées cartésiennes. Désignons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes du point M et par (ρ, θ, z) ses coordonnées cylindriques. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est donné par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz, de rayon ρ d'où le terme coordonnées cylindriques.
Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire θ
Pour ce système de coordonnées, les courbes coordonnées sont :

- θ et ρ étant fixés, la courbe coordonnée-z est une droite parallèle à δ (axe du cylindre)
- θ et z étant fixés, la courbe coordonnée-ρ est une demi-droite perpendiculaire à Δ, ayant son origine sur Δ.
- z et ρ étant fixés, la courbe coordonnée-θ est un cercle d'axe Δ.

Coordonnées sphériques. Les coordonnées sphériques (figure ci-dessous) permettent de repérer un point sur une sphère de rayon $OM = r$. C'est typiquement le repérage d'un point sur la Terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles : la latitude et la longitude.



Les coordonnées sphériques sont alors la donnée du triplet (r, θ, ϕ)

- **La coordonnée radiale** r correspond à la distance de l'origine O du repère au point M .
- **La coordonnée angulaire** θ correspond à l'angle que fait OM avec l'axe Oz. Cet angle, compris entre 0 et π, est appelé colatitude (angle complémentaire de la latitude) ou zénith.
- **La coordonnée angulaire** ϕ correspond à l'angle que fait le plan défini par l'axe Oz et OM avec l'axe Ox. Cet angle, compris entre 0 et 2π, est appelé la longitude ou l'azimut.

Relations avec les coordonnées cartésiennes. Désignons par (x, y, z) les coordonnées cartésiennes du point M et par (ρ, θ, ϕ) ses coordonnées sphériques. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est donné par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Pour ce système de coordonnées, les courbes coordonnées sont :

- θ et ϕ étant fixés, la courbe coordonnée-r est une demi-droite d'origine O parcourue par le point M lorsque r varie de 0 à l'infini.
- ϕ et r étant fixés, la courbe coordonnée-θ est un demi-cercle de centre O et dont le diamètre est porté par Δ. Ce demi-cercle est parcouru par M pour θ variant de 0 à π.
- r et θ étant fixés, la courbe coordonnée-ϕ est un cercle d'axe Δ. M fait le tour de ce cercle lorsque ϕ varie de 0 à 2π

Définition et repère local cartésien

Définition. Pour un système de coordonnées orthogonales (u, v, w), on appelle **repère local**, le repère ayant pour origine le point courant M et pour base les trois vecteurs linéairement indépendants $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ définis de la manière suivante :

$$\overrightarrow{e_u} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}}{\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\|} \ ; \ \overrightarrow{e_v} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\|} \ ; \ \overrightarrow{e_w} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}}{\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}\|}$$

Repère local cartésien. Les coordonnées (u, v, w) utilisées sont (x, y, z). Les lignes coordonnées sont des droites et les vecteurs tangents à ces lignes sont donc des vecteurs directeurs de ces droites. Toutes les droites coordonée-x sont parallèles entre elles et ont donc même vecteur directeur, de même pour y et z. Dans ce cas les vecteurs de base locaux sont donc en tout point les mêmes vecteurs $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

Ce qui conduit de suite à :

$$\overrightarrow{e_x} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \ ; \ \overrightarrow{e_y} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \ ; \ \overrightarrow{e_z} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z}$$

Repère local polaire

Il s'agit ici d'un problème plan : $\overrightarrow{OM}$ est fonction des deux variables ρ et θ. On a donc :

$$\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}}{N_\rho} \quad \overrightarrow{e_\theta} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{N_\theta}$$

Il est facile d'exprimer les coordonnées de ces vecteurs dans la base cartésienne et le calcul de $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$ et de sa norme N_ρ égale à 1, ainsi que $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ et de sa norme N_θ égale à ρ nous donne

Définition. Les vecteurs de base du repère polaire local sont définis par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_x} \cos\theta + \overrightarrow{e_y} \sin\theta \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\overrightarrow{e_x} \sin\theta + \overrightarrow{e_y} \cos\theta \end{cases}$$

$\overrightarrow{e_\rho}$ est le **vecteur unitaire radial** et $\overrightarrow{e_\theta}$ est le **vecteur unitaire orthoradial**

Repère local cylindrique

Les coordonnées (u, v, w) sont (ρ, θ, z). Les calculs sont les mêmes que pour les coordonnées polaires $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, le troisième vecteur de base étant $\overrightarrow{e_z}$

Définition. Les vecteurs $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ définis par

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_x}\cos\theta + \overrightarrow{e_y}\sin\theta \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\overrightarrow{e_x}\sin\theta + \overrightarrow{e_y}\cos\theta \\ \overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

forment une base orthonormée directe de l'espace.

Les formules inverses s'obtiennent très simplement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_x} = \cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\overrightarrow{e_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Repère local sphérique

(u, v, w) sont (r, θ, ϕ). On a $\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\phi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\sin\phi\overrightarrow{e_y} + r\cos\theta\overrightarrow{e_z}$.

Ce qui nous permet de calculer $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\phi}$ ainsi que leurs normales, ce qui nous donne

Définition. Les vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi})$ donnés par

$$\left\{\begin{array}{lll} N_r = 1 & \text{et} & \overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\phi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\phi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z} \\ N_\theta = r & \text{et} & \overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\phi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z} \\ N_\phi = r\sin\theta & \text{et} & \overrightarrow{e_\phi} = -\sin\phi\overrightarrow{e_x} + \cos\phi\overrightarrow{e_y} \end{array}\right.$$

constituent une base orthormée directe de l'espace.
Les vecteurs de base cartésiens s'écrivent en fonction de cette base locale de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_x} = \sin\theta\cos\phi\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\cos\phi\overrightarrow{e_\theta} - \sin\phi\overrightarrow{e_\phi} \\ \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\sin\phi\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\sin\phi\overrightarrow{e_\theta} + cos\phi\overrightarrow{e_\phi} \\ \overrightarrow{e_z} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \end{array}\right.$$

Coordonnées polaires du plan - Coordonnées cylindriques et sphériques de l'espace

En coordonnées curvilignes, les vecteurs de base dépendent du point où on les considère : ce sont des fonctions de ce point. Lorsqu'une grandeur s'exprime en fonction de vecteurs de base locaux, les dérivées de cette grandeur font intervenir les dérivées de vecteurs de la base. Voici quelques dérivées de ces vecteurs.

Coordonnées polaires et cylindriques. Des expressions des vecteurs $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, il résulte que les dérivées de ces vecteurs par rapport à θ s'obtiennent en faisant tourner le vecteur de $+\frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\frac{\partial \overrightarrow{e_\rho}}{\partial \theta} = \overrightarrow{e_\theta} \ , \ \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

Coordonnées sphériques. On constate que les trois vecteurs de la base locale sphérique ne dépendent pas de r. On voit aussi que le vecteur $\overrightarrow{e_\phi}$ est indépendant de θ. Les dérivées qui ne sont pas nulles se calculent directement et on a :

$$\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \theta} = \overrightarrow{e_\theta} \ , \ \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \theta} = -\overrightarrow{e_r}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial \phi} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_\phi} \ , \ \frac{\partial \overrightarrow{e_\theta}}{\partial \phi} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_\phi} \ , \ \frac{\partial \overrightarrow{e_\phi}}{\partial \phi} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Déplacement élementaire d'un point

Définition. On appelle **déplacement élémentaire** ou **infinitésimal** d'un point, le vecteur décrit par ce point lorsque ses coordonnées subissent des variations arbitraires mais infinitésimales. Si les coordonnées utilisées sont (u, v, w) l'expression dans la base du déplacement élémentaire résultant de variations du, dv, dw est :

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}du + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}dv + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial w}dw = N_u du\overrightarrow{e_u} + N_v dv\overrightarrow{e_v} + N_w dw\overrightarrow{e_w}$$

Pour les systèmes de coordonnées les plus courants on a :

En coordonnées cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées polaires : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta}$

En coordonnées cylindriques : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées sphériques : $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\phi\overrightarrow{e_\phi}$

Bon courage

LIENS UTILES ☝

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage