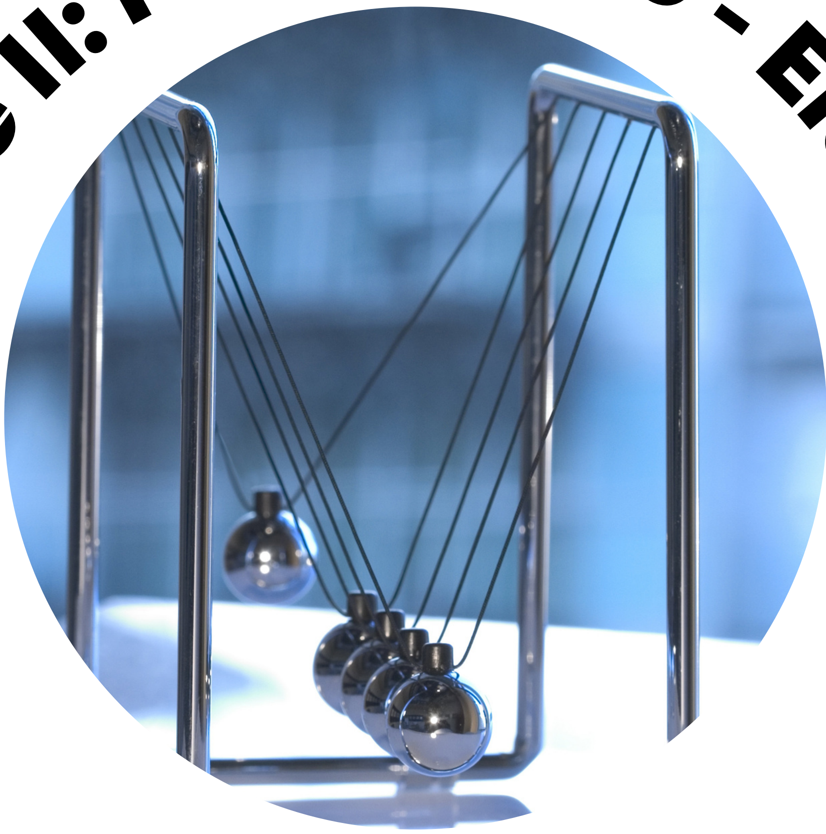
@Mohamed_Nahli

Physique II: Mécanique - Electricité

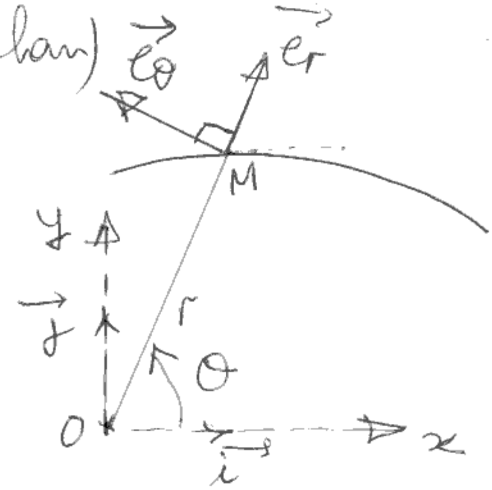


SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

J. Diouri

Systèmes de coordonnées

Coordonnées polaires (plan)

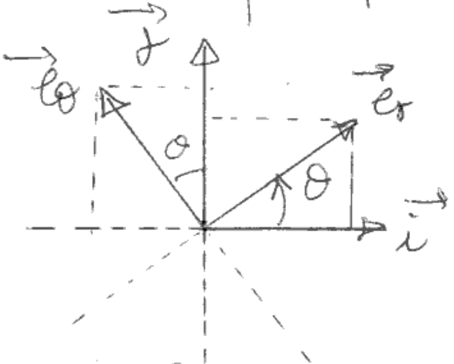


M est repéré par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ et la distance $r = OM$.

$\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$.

$\vec{e_\theta} \perp \vec{e_r}$ orienté dans le sens positif de θ.

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ \vec{j} = \sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta} \end{cases}$$

$(r,\theta) \overset{?}{\longleftrightarrow} (x,y)$

Vitesse : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

On montre : $\dfrac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$; $\dfrac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

[Notation : $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$, $\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$]

Accélération

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$$

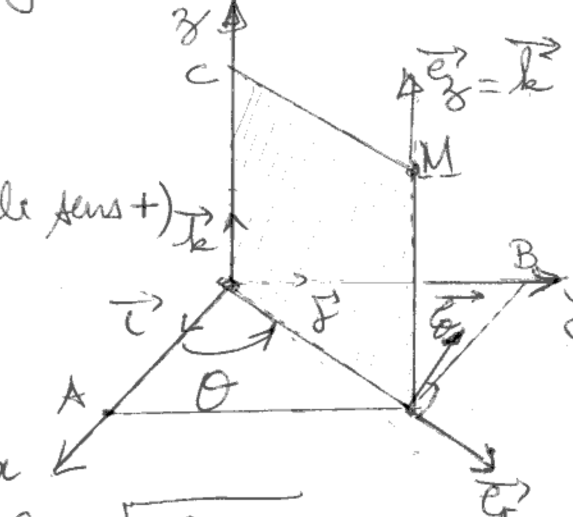
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta}$$

Ex Trajectoires $r = R$ (cercle) $\theta = \theta_0$ (droite)

S. Diouri

Coordonnées cylindriques.

$M(\theta, \rho, z)$.



$$\begin{cases} \theta = (\vec{Ox}, \vec{Om}) & \text{(respecter le sens +)} \\ \rho = Om \\ z = mM \end{cases}$$

$x_M = OA = \rho\cos\theta$

$y_M = OB = \rho\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$z_M = z = OC \qquad tg\theta = \dfrac{y}{x}$

la surface $\rho = R$ est le cylindre droit d'axe Oz et de rayon R.

la surface $\theta = \theta_0$ est le plan vertical parallèle à Oz tel que $(Ox, P) = \theta$.

Vitesse:

$$\vec{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = (\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta)\,\vec{i} + (\dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta)\,\vec{j} + \dot z\,\vec{k}$$

$$= \dot\rho(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \rho\dot\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) + \dot z\,\vec{k}$$

$$= \dot\rho\,\vec{e_r} + \rho\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot z\,\vec{k}$$

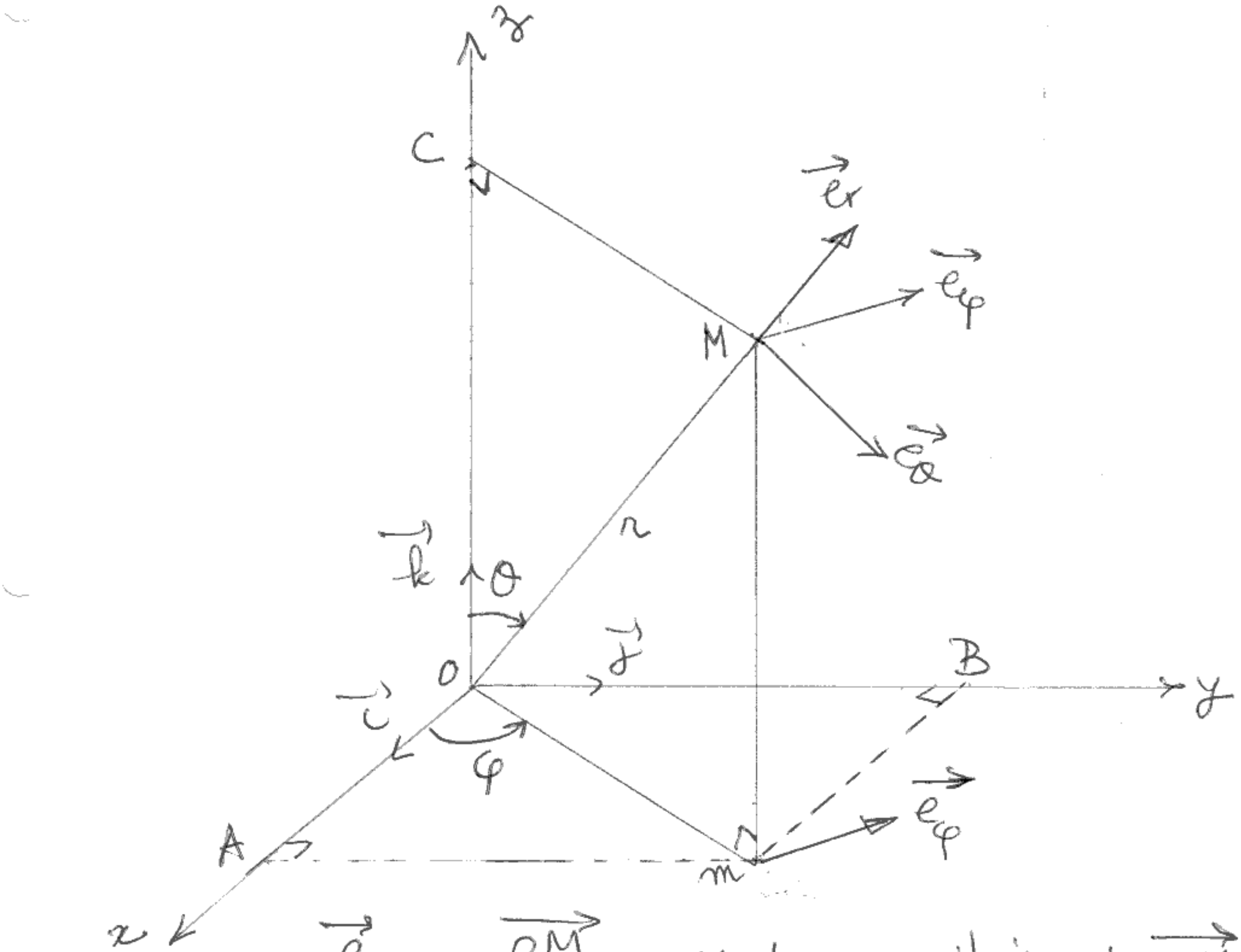
Accélération:

$\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} =$ m formule qu'en coordonnées polaires $+ \ddot z\,\vec{k}$

Ex: trajectoire sur un cylindre: $\rho =$ cste $\Rightarrow \vec{v}\,?\ \vec{\gamma}\,?$

J. Driouri

Coordonnées sphériques



Construction de la base

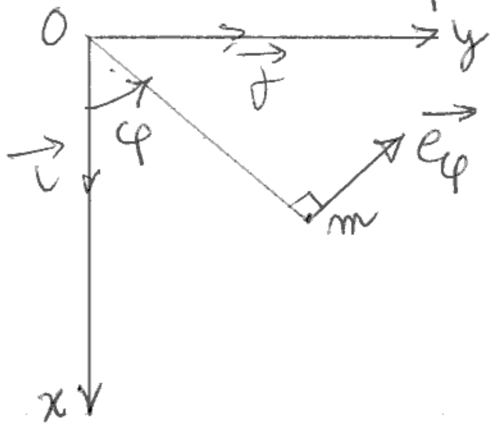
$\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$.

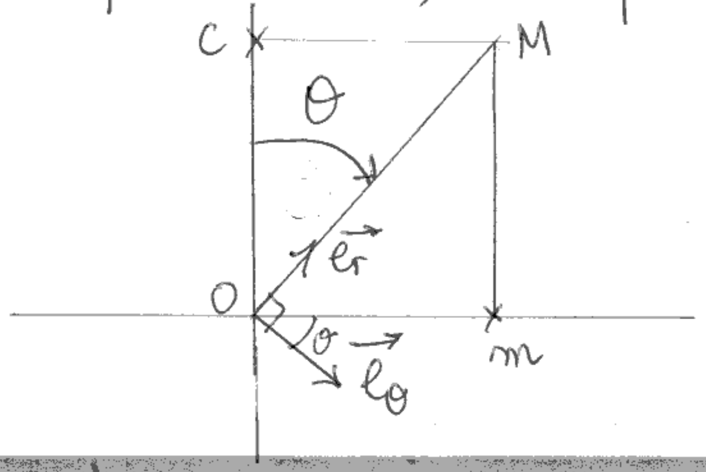
$\vec{e_\varphi}$: dans le plan xOy, $\perp$ à $\overrightarrow{Om}$, orienté dans le sens de $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om})$
$\perp$ plan $OmMC$

$\vec{e_\theta}$: dans le plan $OmMC$, $\perp \overrightarrow{OM}$, orienté dans de $\theta = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM})$.

$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ base orthonormée.

$\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi}$; $\vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$, $\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\varphi} = \vec{e_r}$

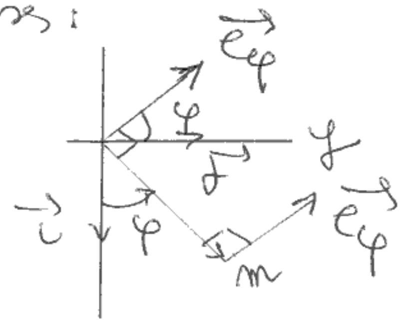




J. Diouri

Coordonnées sphériques, suite

Relations entre les deux bases :

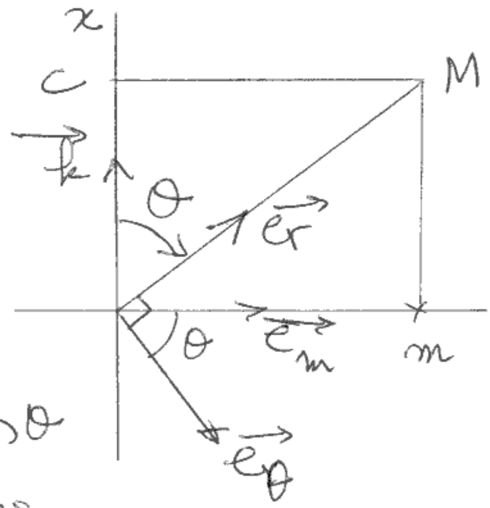


$$\vec{e_\varphi} = \cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{i}$$

$$\vec{e_\theta} = \vec{e_m}\cos\theta - \vec{k}\sin\theta$$

$$\vec{e_r} = \vec{e_m}\sin\theta + \vec{k}\cos\theta$$

$$\vec{e_m} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$



Ce qui donne :

$$\vec{e_r} = \vec{i}\cos\varphi\sin\theta + \vec{j}\sin\varphi\sin\theta + \vec{k}\cos\theta$$

$$\vec{e_\theta} = \vec{i}\cos\varphi\cos\theta + \vec{j}\sin\varphi\cos\theta - \vec{k}\sin\theta$$

$$\vec{e_\varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi,$$

Vérifiez : $|\vec{e_r}| = |\vec{e_\theta}| = |\vec{e_\varphi}| = 1$, $\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi}$ etc.

Changement de coordonnées :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \,;\; y = r\sin\theta\sin\varphi \,;\; z = r\cos\theta.$$

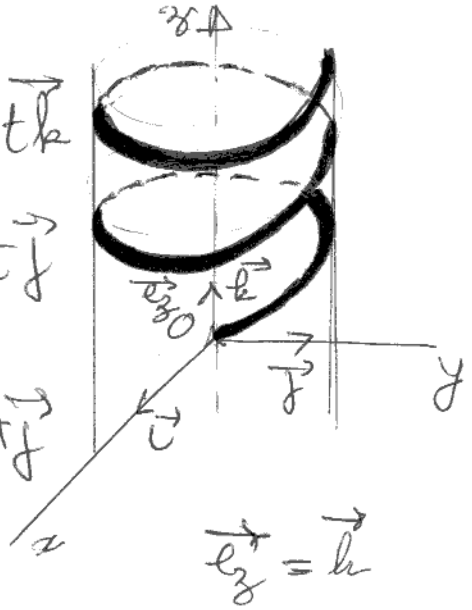
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \,;\; r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \,,\; \cos\theta = \frac{z}{r}.$$

$$\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta} = \vec{e_\theta} \,;\; \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi} = \vec{e_\varphi}\sin\theta \,;\; \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta} = -\vec{e_r} \,;\; \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi} = \vec{e_\varphi}\cos\theta$$

<u>Vitesse</u> : $\vec{OM} = r\vec{e_r} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$

Exemples de Mouvements.

Mouvement hélicoïdal uniforme d'axe Oz :



$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\omega t\,\vec{i} + \rho\sin\omega t\,\vec{j} + h\omega t\,\vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\omega\rho\sin\omega t\,\vec{i} + \rho\omega\cos\omega t\,\vec{j} + h\omega\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -\omega^2\rho\cos\omega t\,\vec{i} - \omega^2\rho\sin\omega t\,\vec{j}$$

ou encore :

$$\vec{V} = V_0\,\vec{e_\theta} + V_1\,\vec{e_z}$$

$$\vec{\gamma} = -\omega^2\rho\,\vec{e_\rho}.$$

$$\begin{cases} V_0 = \omega.\rho, \\ V_1 = h\omega. \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

En général un mouvement hélicoïdal est défini par :
$$\begin{cases} \rho = Cte = R \rightarrow \dot{\rho} = 0 \\ z = h\theta. \end{cases}$$

ce qui donne : $\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + h\dot{\theta}\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e_r} + h\theta\,\vec{k} + \overrightarrow{OM_0}$$

M_0 position initiale.

Mouvement circulaire quelconque.

En coordonnées polaires avec : $r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

d'où $\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ $\quad \vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = \gamma_\theta\,\vec{e_\theta} + \gamma_r\,\vec{e_r}$

γ_θ = accélération tangentielle (orthoradiale)

γ_r = accélération radiale (centripète)

J. Diouri

Mouvement à accélération Centrale

(تسارع مركزي)

__définition:__

Il existe un point fixe, Centre, O, tel que pour chaque position du mouvement

(1) $\quad \vec{\gamma}(M) \parallel \overrightarrow{OM}$. ou $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M) = 0$

__Propriété 1__ : le mouvement est plan.

(1) s'écrit : $\overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{d\vec{V}}{dt} = 0$

or, nous avons $\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma} = 0$

d'où $\quad \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \vec{C}$ (Vecteur Constant)

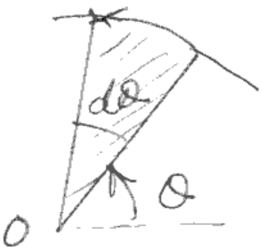
$\Rightarrow$ M est toujours dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{C}$.

__Propriété 2__

on a vu : $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta}$

__ici__ : $\vec{\gamma} \parallel \vec{e_r} \Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \underline{r^2\dot{\theta} = cte}$

C'est la loi des aires.



l'aire (Surface) balayée par OM pendant dt :

$$dS = r^2 d\theta \Rightarrow \frac{dS}{dt} = r^2\dot{\theta} = Cte$$

$\Rightarrow$ la vitesse aréolaire (variation de la surface balayée par $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps) est constante.

__Formules de Binet.__ (A démontrer en TD)

$$\vec{\gamma} = -C^2u^2\left[u + u''\right]\vec{e_r} \qquad \text{où } u = \frac{1}{r}$$

$$\vec{V} = -C\frac{du}{d\theta}\vec{e_r} + C u\,\vec{e_\theta} \qquad u' = \frac{du}{d\theta}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Applications : Mouvements des planètes.

Bon courage

LIENS UTILES

Visiter :

1. https://biologie-maroc.com
   - Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. https://biologie-maroc.com/shop/
   - Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
   - Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
   - Trouver des bourses et des écoles privées

3. https://biologie-maroc.com/emploi/
   - Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
   - Trouver des offres d'emploi et de stage