

Mathématiques



SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE



Shop



- Cahiers de Biologie + Lexique
- Accessoires de Biologie



Etudier



Visiter [Biologie Maroc](http://www.biologie-maroc.com) pour étudier et passer des QUIZ et QCM en ligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.



Emploi



- CV • Lettres de motivation • Demandes...
- Offres d'emploi
- Offres de stage & PFE

A group of four diverse students (three young women and one young man) are standing in a hallway, smiling at the camera. They are holding various school supplies like books, folders, and a stack of colorful books. The text 'LES ÉTUDIANTS DE SVT [S1]' is overlaid in the center.

LES ÉTUDIANTS DE SVT [S1]

» Faculté des science – Tetouan  »

 Correction : Les Series
de Espace Victoriél ET de Matrice

DATE : 2018/2019

Réalisé par :
FATIMA ZAHRA BALLOUKI

Série no : 1 (Mathématiques, S1)
SVI - STU,

Exercice 1 :

بين المجموعات التالية مساحات المتجهة
1) Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x + y + 3z = 0\}.$
- (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + z = 2\}.$
- (c) $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x = y = 2z = 4t\}.$
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \cdot y = 0\}.$
- (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x| < 1\}.$

2) On considère l'ensemble $F \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - y - z = 0\}$$

- (a) L'ensemble F est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
 - (b) Donner une base pour F , et en déduire la dimension de F .
- 3) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (2, 2, 4)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
La famille $\{v_1, v_2\}$ est-elle libre ?
La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?
- 4) Soient $v_1 = (2, 1, 2)$ et $v_2 = (-1, 1, -3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Trouver $x \in \mathbb{R}$ pour que $(2, 2, x) \in \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 2 :

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P'(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 3 :

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], \quad P(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P(2) = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de F .

Exercice 4 :

Soient $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, -5, 7)$.

Soient $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$

1. Donner une base de E . En déduire la dimension de E .
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F . En déduire la dimension de F .
4. Donner une base de $E \cap F$, et en déduire la dimension de $E \cap F$.

Exercice 5 :

Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$,
Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\} \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E , et en déduire la dimension de E .
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$.
4. Est-ce que $u_3 \in E$?
5. Calculer $E \cap F$.
6. Donner une base de $E \cap F$, et en déduire la dimension de $E \cap F$.
7. Soit $u_4 = (-1, 7, 5)$, est ce que $u_4 \in E$? est ce que $u_4 \in F$?

Exercice 6 :

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$; et $a = (1, 2, 3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$
On pose $F = \text{Vect}(a)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. Est-ce que E et F sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 :

Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \quad \text{et} \quad x - 2z = 0\},$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E . En déduire une base de E , et donner $\dim E$.
3. Est-ce que E et F sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soient $a = (1, 1, 0)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$, et soit $u = (x, y, z)$.
Exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Espaces vectoriels réels (sur $\mathbb{R}$)

Correction de la série ma :

(1 Mathématiques, S1)

Exercice 1/2 : Soit A un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :

Exercice 1 :

1)-

Espace vectoriels réels

$$a)- A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + 3z = 0 \}$$

$A \subset \mathbb{R}^3$ par sa définition

$A \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in A$ en effet

$$2 \times 0 + 0 + 3 \times 0 = 0$$

* stabilité par addition :

soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in A$

a-t-on $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in A$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2)$$

$$= \underbrace{2x_1 + y_1 + 3z_1}_{=0} + \underbrace{2x_2 + y_2 + 3z_2}_{=0}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in A$

* stabilité par multiplication externe :

Soit $(x, y, z) \in A$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

est-ce que $\lambda(x, y, z) \in A$?

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$= 2(\lambda x) + (\lambda y) + 3(\lambda z) = \lambda(2x + y + 3z) = 0$$

Correction de la
série mathématique

$$\lambda \cdot 0 = 0$$

Donc $\lambda(x, y, z) \in A$, ...

Conclusion: A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$b) B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2\}$$

* $B \subset \mathbb{R}^3$ (par définition)

* $B \neq \emptyset$ car $(2, 2, 2) \in B$

$$\text{en effet } 2 - 2 + 2 = 2$$

* **Stabilité par addition :**

Soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in B$

$$\text{ona } (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 - y_1 + z_1}_{=2} + \underbrace{x_2 - y_2 + z_2}_{=2}$$

$$= 2 + 2 = 4 \neq 2$$

$$\text{Donc } (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \notin B$$

D'où

B n'est pas stable par addition

Conclusion: B n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$c) C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2\}$$

$$C \neq \emptyset \text{ car } (0, 0, 0) \in C$$

$$\text{en effet } 0 = 0 = 2 \times 0 = 4 \times 0$$

$C \subset \mathbb{R}^3$ par définition

* **Stabilité par addition :**

Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et $(x_2, y_2, z_2, t_2) \in C$

a-t-on: $(x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) \in C$

on a $(x_1, y_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 2z_1 \\ y_2 = 2z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 + y_2 = 2(z_1 + z_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2z_1 = 4t_1 \\ 2z_2 = 4t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(z_1 + z_2) = 4(t_1 + t_2)$$

C'est stable par addition

* stabilité par multiplication :

externe :

Soit $(x, y, z, t) \in C$

Soit $d \in \mathbb{R}$

a-t-on $d(x, y, z, t) \in C$?

on a :

$$d(x, y, z, t) = (dx, dy, dz, dt)$$

$$x = y = 2z = 4t$$

$$\Rightarrow dx = dy = 2dz = 4dt$$

$$\Rightarrow d(x, y, z, t) \in C$$

conclusion : C'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$b) D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \cdot y = 0 \}$$

D n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in D \text{ car } \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \in D \text{ car } 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{mais } \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$$

$$\text{en effet } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$$

D n'est pas stable par addition.

$$(e) E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x| < 1\}$$

E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car :

$$\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right) \in E \text{ car } \left|\frac{1}{5}\right| < 1$$

$$\left(\frac{9}{10}, 0, 0\right) \in E \text{ car } \left|\frac{9}{10}\right| < 1$$

$$\text{mais } \left(\frac{11}{10}, 0, 0\right) \notin E$$

$$\text{car } \left|\frac{11}{10}\right| < 1$$

n'est pas stable par addition.

$$2) F \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ définie par}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0\}$$

$$* F \neq \emptyset \text{ car } (0, 0, 0) \in F$$

$$\text{en effet } 2 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

*** Stabilité :** soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in F$

$$\text{soient } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

a. t. on :

$$\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2) \in F$$

on a :

$$\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2) \\
 &= \alpha(2x_1 - y_1 - z_1) + \beta(2x_2 - y_2 - z_2) \\
 &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base :

* Libre :

$$\begin{aligned}
 \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 &= \vec{0} \\
 \Rightarrow \alpha = \beta &= 0
 \end{aligned}$$

* générateurs :

Soit $(x, y, z) \in F$ donc on a $2x - y - z = 0$

$$\Rightarrow 2x = y + z = 0$$

$$\Rightarrow 2x = y + z$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, y, z\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}y, y, 0\right) + \left(\frac{1}{2}z, 0, z\right)$$

$$= y \underbrace{\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}_{\vec{w}_1} + z \underbrace{\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)}_{\vec{w}_2} = y \vec{w}_1 + z \vec{w}_2$$

Donc $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est un système générateur
R est e à voir est ce que il est libre !

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 = (0, 0, 0)$$

$$\alpha \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \beta \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc le système $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ est libre.

conclusion : $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est une base de F

$$\dim F = \text{card} \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$$

F est appelé plan vectoriel

$$\dim = 2 \ll \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

$$3) - U_1 = (1, 1, 1)$$

$$U_2 = (1, 1, 0)$$

$$U_3 = (2, 2, 4)$$

* La famille $\{U_1, U_2\}$ est-elle libre?

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha U_1 + \beta U_2 = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $\{U_1, U_2\}$ est libre.

* La famille $\{U_1, U_2, U_3\}$ est-elle libre?

+ Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(2, 2, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + 4\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha - 2\gamma = 4\gamma - 2\gamma = 2\gamma \\ \alpha = -4\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4\delta \\ \beta = 2\delta \\ \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a la relation !

$$-4\delta U_1 + 2\delta U_2 + \delta U_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \delta (-4U_1 + 2U_2 + U_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -4U_1 + 2U_2 + U_3 = \vec{0}$$

$\{U_1, U_2, U_3\}$ est une famille liée

$$4) - U_1 = (2, 1, 2)$$

$$U_2 = (-1, 1, -3)$$

$$x? \quad (2, 2, x) \in \text{Vect}(U_1, U_2)$$

$G = \text{Vect}(U_1, U_2)$ est le sous-espace vectoriel engendré par (U_1, U_2)

$$(2, 2, x) \in G \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que}$$

$$(2, 2, x) = \alpha U_1 + \beta U_2$$

$$= \alpha (2, 1, 2) + \beta (-1, 1, -3) = (2\alpha - \beta, \alpha + \beta, 2\alpha - 3\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 2 & \textcircled{1} \\ \alpha + \beta = 2 & \textcircled{2} \\ 2\alpha - 3\beta = x & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 3\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \beta = 2 - \alpha = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x = 2\alpha - 3\beta = 2 \times \frac{4}{3} - 3 \times \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

+ Exercice 2:

$$\text{Soit } E = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0 \right\}$$
$$(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$$

est l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coefficients réels

$$E = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0 \}$$

1°) * $E \subset \mathbb{R}_2[X]$ par déf.

* $E \neq \emptyset$ car le polynôme nul est élément de E , en effet

$$0(X) = 0 = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0$$

$$0(1) = 0$$

$$0'(X) = 0 \Rightarrow 0'(1) = 0$$

* Stabilité par addition :

- Soient P et $Q \in E$.

a-t-on $P+Q \in E$?

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$

$$(P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x)$$

$$(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$$

$$(P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1) = 0 + 0 = 0$$

Donc $P+Q \in E$

Donc E est stable par addition

* Stabilité par multiplication externe :

+ Soient $P \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a-t-on $\lambda P \in E$?

$$(dP)(x) = d(P(x))$$

$$(dP)'(x) = d(P'(x))$$

$$(dP)(1) = d(P(1)) = d(0) = 0$$

$$(dP)'(1) = d(P'(1)) = d(0) = 0$$

$$\Rightarrow dP \in E$$

E est stable par multiplication externe.

+ **conclusion :** E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$

2°) Soit $P \in E$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow b = -2a$$

$$\text{donc } c = -a + 2a = a$$

$$\Rightarrow c = a$$

D'où P s'écrit

$$P(x) = ax^2 - 2ax + a$$

$$= a(x^2 - 2x + 1) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Soit } R(x) = x^2 - 2x + 1$$

$\Rightarrow \{R(x)\}$ est une famille génératrice de E

$\{R(x)\}$ libre?

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda R(x) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \lambda(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda x^2 - 2\lambda x + \lambda = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

D'où $\{R(x)\}$ est libre

alors $\{R(x)\}$ est une base de E

$$\dim E = \text{card } \{R(x)\} = 1$$

Donc E est une droite vectorielle de $(\mathbb{R}_2[X])$

+ Exercice 6 :

$$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -2, -1) \text{ et } u_3 = (1, 1, -1)$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y+z=0\} \text{ et } F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

1°) $E \subset \mathbb{R}^3$ (par def)

$$E \neq \emptyset \text{ car } (0, 0, 0) \in E \text{ en effet } 0+0=0$$

* Stabilité par combinaison linéaire :

+ Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux vecteurs de E .

- Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$.

$$A-t-on \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E ?$$

$$\text{alors } \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$\text{car } (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2) \\ = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

$$\text{Donc } \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E$$

D'où E est stable par combinaison linéaire.

+ conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

20) - Soit $(x, y, z) \in E$

$$\text{alors } y + z = 0$$

$$\text{donc } y = -z$$

$$(x, y, z) = (x, -z, z) = (x, 0, 0) + (0, -z, z)$$

$$= x(1, 0, 0) + z(0, -1, 1)$$

$$\text{Donc } \{ (1, 0, 0); (0, -1, 1) \}$$

est une famille génératrice de E

+ Est-elle libre?

+ Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha, -\beta, \beta) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc $\{ (1, 0, 0); (0, -1, 1) \}$ est libre

D'où $\{ (1, 0, 0); (0, -1, 1) \}$ est une base de E

$$\dim E = \text{card} \{ (1, 0, 0); (0, -1, 1) \}$$

$$= 2$$

E est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$

30) - (u_1, u_2, u_3) libre?

+ Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, -2, -1) + \gamma(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2\beta + \gamma, \alpha - 2\beta + \gamma, \alpha - \beta - \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & \textcircled{1} \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 & \textcircled{2} \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 2\alpha + 2\delta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \delta = 0$$

$$③ \Rightarrow \beta = \alpha - \delta$$

$$① \Rightarrow 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - \delta = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \delta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \delta = 0$$

Donc (u_1, u_2, u_3) est libre

- $u_3 \in F? = \text{vect}(u_1, u_2)?$

- Supposons que $u_3 \in F$

alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$\Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ liée (contradiction)

D'où $u_3 \notin F$

+ Exercice 6 :

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$ et $a = (1, 2, 3)$

$$F = \text{vect}(a) = \text{vect}\{(1, 2, 3)\}$$

1- $E \subset \mathbb{R}^3$ (par déf)

$E \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in E$

- en effet $0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

* stabilité :

- Soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in E$

soient α et $\beta \in \mathbb{R}$

alors $\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E$

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + 3(\alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= \alpha(x_1 + 2y_1 + 3z_1) + \beta(x_2 + 2y_2 + 3z_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Donc $\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E$

et E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion: E est un sous-espace vectoriel

2. $E \cap F$?

$(x, y, z) \in E \cap F$

$\Leftrightarrow (x, y, z) \in E$ et $(x, y, z) \in F$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 3\alpha \\ x = 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\alpha + 2 \times 2\alpha + 3 \times 3\alpha = 0 \Rightarrow 14\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } E \cap F = \{(0, 0, 0)\}$$

- Rappel:

Dans $\mathbb{R}^3$

E et F sont des sous-espaces vect. de $\mathbb{R}^3$

1) $E \cap F = \{(0, 0, 0)\}$

2) $E + F = \mathbb{R}^3$ car E et F sont deux sous-espaces vectoriels somme de deux sous-espaces.

$$E + F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \text{ avec } (x_1, y_1, z_1) \in E \text{ et } (x_2, y_2, z_2) \in F\}$$

3 dimension

Rappel: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3 = \{e_1, e_2, e_3\}\end{aligned}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$F = \text{Vect} \{ (1, 2, 3) \} \Rightarrow \text{C'est une base } \dim F = 1 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\dim E < \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$$

$$E \cap F = \{ (0, 0, 0) \} \begin{matrix} \downarrow \\ \text{pas de base} \end{matrix} = 0$$

$$\dim(E \cap F) = 0$$

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F$$

$$\dim(E + F) = \dim \mathbb{R}^3$$

+ base de E? $(x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0$

$$\Rightarrow x = -2y - 3z \Rightarrow (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z)$$

$$= (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

La famille $\{(-2, 1, 0); (-3, 0, 1)\}$ est génératrice de E

"Est elle libre" ?

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (-2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

La famille $\{(-2, 1, 0); (-3, 0, 1)\}$ libre

Donc C'est une base de E $\dim E = 2$

$$\dim(E + F) = 2 + 1 = 3$$

Conclusion: $E + F = \mathbb{R}^3$

Donc E et F sont deux sous-espaces
supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice :

+ Dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, on donne $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1) E sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$?

2) : Donner une base de E et de $\dim E$?

Exercice 7 :

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } x - 2z = 0 \right\}$$

1°) - * $E \subset \mathbb{R}^3$ (par définition)

* $E \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in E$
en effet :

$$0 - 0 = 0 \text{ et } 0 - 2 \times 0 = 0$$

* Stabilité par combinaison linéaire :

Soient (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2) \in E$

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha + \beta = \text{car } \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E ?$$

On a :

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$\text{Alors, } (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2)$$

$$= \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0, (\alpha x_1 + \beta x_2) - 2(\alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$= \alpha(x_1 - 2z_1) + \beta(x_2 - 2z_2) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

Donc $\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in E$
 E est stable par combinaison linéaire

+ Conclusion:
 E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2) - Soit $(x, y, z) \in E$

$$\text{donc } \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = y \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (x, x, \frac{1}{2}x) = x(1, 1, \frac{1}{2})$$

- la famille $\{(1, 1, \frac{1}{2})\}$ est génératrice de E

Comme $(1, 1, \frac{1}{2}) \neq (0, 0, 0)$

alors $\{(1, 1, \frac{1}{2})\}$ est une famille libre.

Donc c'est une base de E

$$\dim E = \text{card} \{(1, 1, \frac{1}{2})\} = 1$$

3) - On rappelle que deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires si et seulement

$$\text{si : } * E \cap F = \{(0, 0, 0)\}$$

$$* E + F = \mathbb{R}^3$$

$$* E \cap F = ?$$

Soit $(x, y, z) \in E \cap F$

donc $(x, y, z) \in E$ et $(x, y, z) \in F$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = \frac{1}{2}x \\ x + x - \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ z = \frac{1}{2}x \\ \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \cap F = \left\{ (0, 0, 0) \right\}$$

$$* E + F = \mathbb{R}^3 ?$$

Donc :

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$$

$$E \cap F = \left\{ (0, 0, 0) \right\}$$

$$\Rightarrow \dim(E \cap F) = 0$$

$$\Rightarrow \dim(E + F) = \dim E + \dim F$$

$$\dim F = ?$$

$$\text{Soit } (x, y, z) \in F$$

$$\Rightarrow x + y - z = 0$$

$$\Rightarrow x + y = z$$

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y)$$

$$= x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \Rightarrow \left\{ (1, 0, 1), (0, 1, 1) \right\} \text{ est un}$$

-Système générateur de F.

Est-il libre?

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc le système est libre

D'où c'est une base de F

$$\dim F = \text{Card} \{ (1,0,1); (0,1,1) \} = 2$$

$$\Rightarrow \dim(E+F) = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Donc $E+F = \mathbb{R}^3$

+ Conclusion: E et F sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

$$+ 4^o) - a = (1,1,0); b = (1,0,1); c = (0,1,1)$$

$$- u = (x,y,z)$$

cherchons α ? et β ? et γ ? tels que

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x & ① \\ \alpha + \gamma = y & ② \\ \beta + \gamma = z & ③ \end{cases}$$

$$② - ① \Rightarrow \boxed{\gamma - \beta = y - x} \quad ④$$

$$③ + ④ \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{z + y - x}{2}}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \alpha = y - \delta$$

$$\Rightarrow \alpha = y - \frac{3+y-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2y - 3 - y + \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{y - 3 + \alpha}{2}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \beta = 3 - \delta$$

$$\Rightarrow \beta = 3 - \frac{3+y-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2 \cdot 3 - 3 - y + \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3 - y + \alpha}{2}$$

Série no : 2 (Mathématiques, S1)
SVI - STU,

Exercice 1 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- 1) Calculer les produits : $A \cdot B$, $A \cdot C$, $({}^t B) \cdot C$,
- 2) Peut-on calculer les produits $C \cdot A$ et $B \cdot C$?

Exercice 2 :

- 1) Les matrices suivantes sont-elles :
 - échelonnées lignes (e. l.) ?
 - échelonnées lignes réduites (e. l. r.) ?
 - échelonnées lignes réduites canoniques (e. l. r. c.) ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

- 2) Calculer lorsque c'est possible les matrices suivantes :
 $A \cdot B$, $B \cdot A$, $C \cdot D$, $E \cdot D$, $F \cdot D$, $E \cdot F$.

Exercice 3 :

Soit A une matrice de type $(3, 3)$, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A vérifie l'équation : $A^3 - 6A^2 + 2A + 12I_3 = 0$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Calculer A^{-1} en utilisant les opérations élémentaires lignes.

Exercice 4 :

On considère l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, x + 2y + z, 2x + y + z),$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.

2. On muni de $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ and $f(e_3)$.
3. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base canonique.
4. Déterminer le noyau et l'image de f . et donner le rang de f .
5. Montrer que l'application f est injective.
6. En déduire que la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique $\mathbb{R}^3$. On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + 3z, x + y + z, x - z),$$

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et l'image de f , et donner une base pour $\text{Ker } f$, et pour $\text{Im } f$.
3. Calculer le rang de f , et en déduire que f n'est pas injective.
4. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont deux sous espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 :

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la formule de l'application linéaire f .
2. Déterminer le noyau de f , et donner une base de $\text{Ker } (f)$. En déduire le rang de f .
3. Déterminer l'image de l'application linéaire f , et donner une base de $\text{Im } (f)$.
4. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker } (f)$ et $\text{Im } (f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Résoudre l'équation :

$$f(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Exercice 7 :

Résoudre les système linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -x + 4y + z = -1 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x - z + 3t = 9 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \\ -x - 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 :

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

Exercice 9 :

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

+ Connection de la Série ma : 2

+ Exercice 1 :

on donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2,3)$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad (3,2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3,3)$$

1) - calcule les produits suivants

$$A \cdot B ?$$

$$A \cdot C ?$$

$$(tB) \cdot C ?$$

2) - est-il possible de calculer les produits suivants

$$C \cdot A ?$$

$$B \cdot C ?$$

+ Connection :

1) - A.B ?

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* A.C?

$$A.C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

* t_B ?

$$t_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(t_B).C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

+ Exercice 2:

2) - condition pour produit de deux matrices A et B:

nombre de colonnes $\rightarrow A \cdot B \leftarrow$ nombre de lignes

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B.A$ + on ne peut pas le calculer car le nombre de colonnes de B⁽³⁾ est différent du nombre de lignes de A⁽³⁾.

$C.D$ + on ne peut pas le calculer car le nombre de colonnes de C⁽³⁾ est différent du nombre de lignes de D⁽⁴⁾.

$$*) - E \cdot D = \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 (1,4) (4,1) (1,1)

$$*) - F \cdot D = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 (2,4) (4,1) (2,1)

*) - $E \cdot F$ on ne peut pas le calculer car le nombre de lignes de E est différent du nombre de lignes de F

$\uparrow$ $\uparrow$
 (1,4) (2,4)

* Exercice 3:

$$1) - A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$+ A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 0 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 0 & 66 \\ 0 & 8 & 0 \\ 66 & 0 & 90 \end{pmatrix}$$

$$+ A^3 - 6A^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 46 & 0 & 66 \\ 0 & 8 & 0 \\ 66 & 0 & 90 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46-60 & 0 & 66-72 \\ 0 & -16 & 0 \\ 66-72 & 0 & 90-108 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 0 & -6 \\ 0 & -16 & 0 \\ -6 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$+ 2A + 12I_3 =$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 0 & 6 \\ 0 & 16 & 0 \\ 6 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

+ Exercice proposé

$M_2(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$E = \left\{ m \in M_2(\mathbb{R}) / m = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right.$$

avec $a, b \in \mathbb{R} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}} \right\}$

1) - E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?

* $E \subset M_2(\mathbb{R})$ (par définition)

* $E \neq \emptyset$ car $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

+ Stabilité par addition :

$$\text{Soient } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

deux matrices de E

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in E$$

E est stable par addition

+ Stabilité par multiplication externe :

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$$

et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in E$$

E stable par multiplication externe.

Conclusion: E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

2) - base de E ?

soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de E

+ Est-elle libre?

- Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

- Donc elle est libre.

- D'où c'est une base de E

$$\dim E = \text{card} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

exercice 2: matrice e.l.h

- 1°) - le nombre de zéros commençant les lignes augmente strictement.

matrice e.l.h

$$1^{\circ}) \downarrow \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2°) - Si la matrice a une ligne nulle, alors la ligne après cette ligne doit être nulle

n. 3°) - tous les pivots = 1

c. 4°) - Dans chaque colonne la où il y a le pivot (=1), les autres coeff sont nuls

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e.l.h.c}$$

+ pivots:

Ce sont les coefficients non nuls par lesquels commence une ligne

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \text{ e.l.h.c}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas e.l. car le nombre des zéros

par les quels commence les lignes n'augmente pas strictement.

$$D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas e.l. car le nombre de zéros}$$

par les quels commence les lignes n'augmente pas strictement.

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e.l.}$$

$$F = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e.l.}$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \text{ e.l.}$$

+ Ex: 3

- 1°) - On a vérifié

$$A^3 - 6A^2 + 2A + 12I_3 = 0$$

- 2°) - matrice inversible:

On dit qu'une matrice A est inversible s'il existe une matrice B qui vérifie

$$A \times B = B \cdot A = I$$

On note $B = A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$\Rightarrow A^3 - 6A^2 + 2A = -12I_3$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{12} \left(A^3 - 6A^2 + 2A \right) = I_3$$

" $2 \cdot I_3 \cdot A$

$$\Rightarrow \frac{-1}{12} (A^2 - 6A + 2I_3) \cdot A = \frac{I}{3} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{12} (A^2 - 6A + 2I_3)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

3°) - opérations élémentaires sur les lignes:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{\sim}{L_{3,1}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underset{\sim}{L_2\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \end{array} \right)$$

$$\underset{\sim}{L_{1,3}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

+ Ex 4:

1°) - $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longrightarrow f((x, y, z))$

on a:

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= (x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z) \\ f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) &\stackrel{?}{=} f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) \\ f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \\ &= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2(z_1+z_2), (x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+(z_1+z_2), \\ &\quad 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)) \\ &= (x_1+y_1+2z_1, x_1+2y_1+z_1, 2x_1+y_1+z_1) \\ &\quad + (x_2+y_2+2z_2, x_2+2y_2+z_2, 2x_2+y_2+z_2) \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + f((x_2, y_2, z_2)) \\ * f(d \cdot (x, y, z)) &\stackrel{?}{=} d \cdot f((x, y, z)) \\ f(d(x, y, z)) &= f((dx, dy, dz)) = (dx+dy+2(dz), dx+2(dy)+dz, \\ &\quad 2(dx)+dy+dz) = d(x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z) \\ &= d \cdot f((x, y, z)) \end{aligned}$$

2°) -

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

$$f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (1, 1, 2)$$

$$f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (1, 2, 1)$$

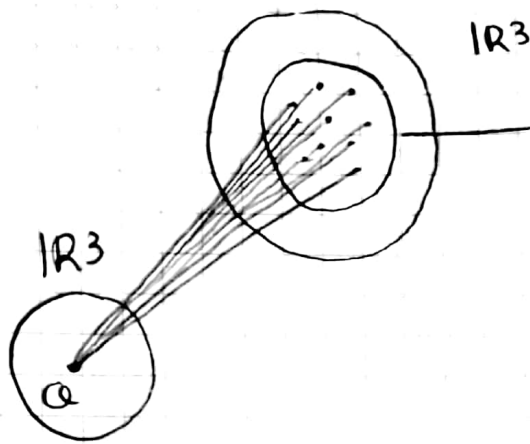
$$f(e_3) = f((0,0,1)) = (2,1,1)$$

$$3^o) - A = M_B(f)$$

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4^o) - f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

f est endomorphe



$$\text{Ker}(f) = \text{Noyau} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0\}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f((x,y,z)) = (0,0,0) \right\}$$

$$f((x,y,z)) = (0,0,0) \Rightarrow (x+y+2z, x+2y+z, 2x+y+z) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 & (1) \\ x+2y+z=0 & (2) \\ 2x+y+z=0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$$

$$(3) - (2) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

On remplace dans (1), on a:

$$y + y + 2y = 0 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Alors } x = y = z = 0$$

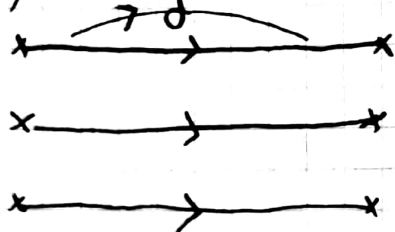
$$\text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$$

1 + L'image de f ?

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) = \{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+y+2z, x+2y+3, 2x+y+3) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+y, 2z, x+2y+3, 2x+y+3) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ (x+y+2z, x+2y+3, 2x+y+3) &= (x, x, 2x) + (y, 2y, y) \\ &\quad + (2z, 3, 3) = x(1, 1, 2) + y(1, 2, 1) + 3(2, 1, 1) \\ \text{Im}(f) &= \text{Vect}\{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\} \\ \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) &= 3 \end{aligned}$$

f injective?

$$* f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$



$$* x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$



f n'est pas injective

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}.$$

$$\text{On a : Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow f((x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

- e) - On a : $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$
on sait que $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
d'où $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

on a vu en (4°) que

$\{(1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1)\}$
 $= \{f(e_1); f(e_2); f(e_3)\}$ est un système générateur
de $\operatorname{Im}(f)$ Montrons qu'il est libre

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 2, 1) + \gamma(2, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

est une base de $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

base de $\mathbb{R}^3$

$$B' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

est aussi une base de $\mathbb{R}^3$ car f est application linéaire.

Bon courage



LIENS UTILES 🙌

Visiter :

1. <https://biologie-maroc.com>

- Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. <https://biologie-maroc.com/shop/>

- Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
- Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
- Trouver des bourses et des écoles privées

3. <https://biologie-maroc.com/emploi/>

- Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
- Trouver des offres d'emploi et de stage

