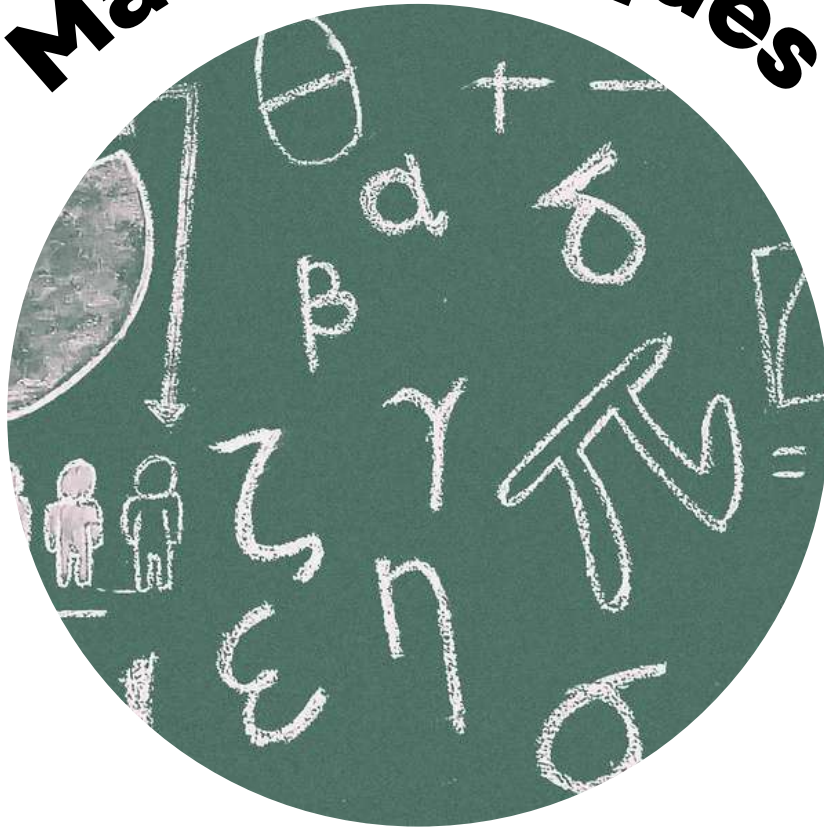


Mathématiques



SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE



Shop



- Cahiers de Biologie + Lexique
- Accessoires de Biologie



Etudier



Visiter [Biologie Maroc](http://www.biologie-maroc.com) pour étudier et passer des QUIZ et QCM en ligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.



Emploi



- CV • Lettres de motivation • Demandes...
- Offres d'emploi
- Offres de stage & PFE

Séquence 1

Les suites numériques

Sommaire

1. Pré-requis
2. Le raisonnement par récurrence
3. Notions de limites
4. Synthèse

Dans cette séquence, il s'agit d'une part d'approfondir la notion de suites numériques permettant la modélisation d'un certain nombre de phénomènes discrets et d'autre part, à travers l'étude des limites de suites, de préparer la présentation des limites de fonctions.

1

Pré-requis

A

Généralités sur les suites

1. Généralités

a) Définition et notations

Définition

On appelle **suite numérique** toute fonction numérique définie sur $\mathbb{N}$ ou sur l'ensemble des entiers supérieurs à un certain entier naturel n_0 .

■ Notations

La suite est notée respectivement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$ ou plus simplement (u_n) .
Le terme de rang n est noté u_n .

b) Vocabulaire

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur l'ensemble des entiers supérieurs à un certain entier naturel n_0 .
On dit que :

- la suite (u_n) est **croissante** si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite (u_n) est **strictement croissante** si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$;
- la suite (u_n) est **décroissante** si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite (u_n) est **strictement décroissante** si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$;
- la suite (u_n) est **constante** si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$;
- si une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est **monotone**.

Définition

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq n_0$. On dit que :

- la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$;
- la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$;
- la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

c) Propriétés

Propriété

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq n_0$.

- Si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq p \geq n_0$ on a $u_n \geq u_p$.
- Si (u_n) est décroissante alors pour tout $n \geq p \geq n_0$ on a $u_n \leq u_p$.

Propriété

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq n_0$ par $u_n = f(u_p)$ où f est une fonction définie sur $[n_0 ; +\infty[$.

- Si f est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$ alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0 ; +\infty[$ alors (u_n) est décroissante.

La réciproque de ces résultats est fausse.

2. Suites arithmétiques

Définition Relation de récurrence

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r ainsi défini est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) .

Propriété

Expression de u_n en fonction de n

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique de raison r alors pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq n_0$, on a $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Propriété Variations

Une suite arithmétique de raison r est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Propriété**Somme de termes**

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique alors pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

= nombre de termes $\times$ moyenne
des termes extrêmes.

En particulier : $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Suites géométriques

Définition Relation de récurrence

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Propriété**Expression de u_n en fonction de n**

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq n_0$, on a

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Propriété**Variations**

La suite $(q^n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si $q > 1$, strictement décroissante si $0 < q < 1$ et constante si $q = 1$ ou si $q = 0$. Lorsque $q < 0$, la suite est alternée (elle n'est donc pas monotone).

Propriété**Somme de termes**

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique de raison $q \neq 1$ alors pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $n \geq p$,

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour tout réel $q \neq 1$: $\sum_{k=1}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

4. Un exemple : étude d'une suite arithmético-géométrique

On souhaite étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 6 - 0,5u_n$ et $u_0 = 1$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :
 - a) établir un tableau de valeurs de la suite (u_n) ;
 - b) proposer une représentation graphique de (u_n) ;
 - c) conjecturer les variations de (u_n) , ainsi que son comportement pour de grandes valeurs de n .
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 4$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser le terme initial et la raison.
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - c) Conclure quant aux variations de la suite (u_n) .
 - d) Écrire un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $4 - A < u_n < 4 + A$ où A est un réel positif quelconque.

► Solution

1.

- a) Avant de travailler sur la calculatrice ou sur un tableur, il est nécessaire de savoir travailler « à la main ». Pour obtenir un tableau de valeur de la suite (u_n) , on détermine ses termes de proche en proche, à l'aide de la relation de récurrence $u_{n+1} = 6 - 0,5u_n$ ainsi que du terme initial $u_0 = 1$.

On obtient donc $u_0 = 1$, $u_1 = 6 - 0,5u_0 = 6 - 0,5 \times 1 = 5,5$,

$$u_2 = 6 - 0,5u_1 = 6 - 0,5 \times 5,5 = 3,25, \text{ etc.}$$

À l'aide de la calculatrice TI82 Stats.fr (ou TI83, TI84), on procède de la façon suivante :

On se place en mode Suit (ou mode SEQ).

On définit la suite par le menu f(x) (ou Y=) ainsi que le montre l'écran ci contre. Il faut faire attention en définissant les suites car sur les TI, il y a un décalage des indices : on doit remplacer $n+1$ par n et donc n par $n-1$.

On configure le tableau de valeurs par le menu déftable (ou TBLSET) en choisissant une valeur de départ égale à 0 (première valeur de l'indice) et un pas de 1.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=6-0.5*u(n-1)
u(nMin)=1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=

```

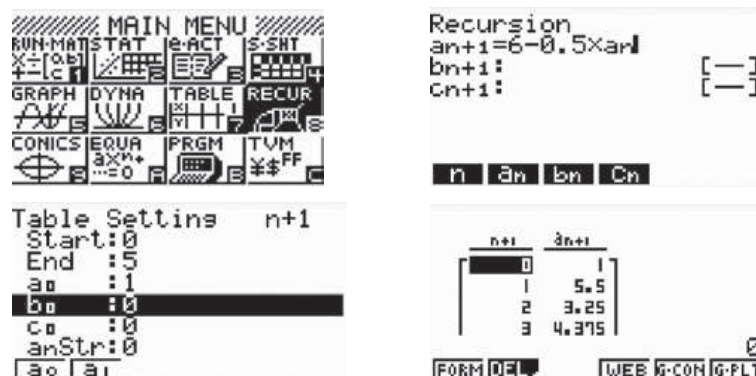
n	u(n)
0	1
1	5.5
2	3.25
3	4.375
4	3.8125
5	4.0938
6	3.9531

n=0

On obtient alors le tableau dans lequel on peut naviguer par le menu table.

À l'aide de la calculatrice CASIO Graph 35+, on procède de la façon suivante.

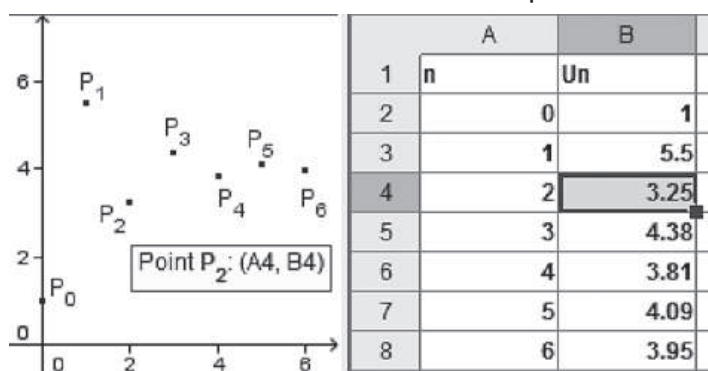
On se place en mode RECUR, on définit la suite (2^e écran ci-dessous), le fonction SET (F5) permet de définir le terme initial et les termes dont on cherche des valeurs approchées (3^e écran), on revient à l'écran précédent (EXIT) et la fonction TABLE (F6) nous donne le tableau de valeurs (4^e écran).



À l'aide du tableur d'OpenOffice, on entre le terme initial en B2 puis on obtient les termes successifs de la suite en entrant en B3 la formule $=6-0,5*B2$ que l'on recopie vers le bas.

		B3	$=6-0,5*B2$
	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	1	
3	1	5,5	
4	2	3,25	
5	3	4,38	

À l'aide du tableur de GeoGebra, on procède comme ci dessus en entrant le terme initial en B2 puis la formule $=6-0.5*B2$.



Une fois que l'on dispose du tableau de valeurs, on obtient rapidement une représentation graphique de la suite en sélectionnant la plage A2 : B8 (par exemple) puis en choisissant créer une liste de points après avoir cliquer-droit. On obtient alors une suite de points dont l'abscisse représente n et l'ordonnée est u_n .

- b) Nous venons de voir comment on pouvait représenter la suite (u_n) à l'aide de GeoGebra, en plaçant n en abscisse et u_n en ordonnée comme on le fait pour représenter une fonction. Cette représentation peut aussi être obtenue à l'aide du tableur d'OpenOffice ou de la calculatrice.

Nous allons voir une autre façon de représenter une suite (u_n) dont le terme général vérifie la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction. La méthode est générale mais nous l'appliquerons dans le cas particulier de notre exemple.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=6-0,5 u_n$ ainsi $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction affine définie par On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y=x$.

L'idée est alors de placer les termes successifs $u_0, u_1, u_2, \dots$ de la suite sur l'axe des abscisses.

On commence par placer u_0 sur l'axe des abscisses.

On place alors le point P_0 de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse vaut u_0 .

Par construction, P_0 a donc pour ordonnée $f(u_0)$ c'est-à-dire u_1 .

Il reste à « ramener » u_1 sur l'axe des abscisses. Pour ce faire, on détermine le point de Δ ayant pour ordonnée u_1 . Par construction, ce point a donc pour coordonnées $(u_1; u_1)$ et le réel u_1 peut être placé en abscisse.

À partir de u_1 en abscisse, on recommence le procédé en déterminant le point P_1 d'ordonnée $f(u_1)$ c'est-à-dire u_2 puis en « ramenant » u_2 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite Δ .

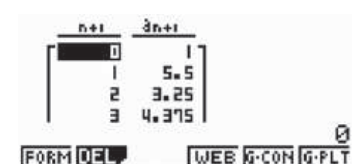
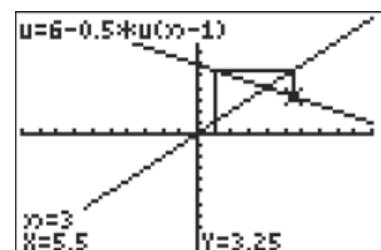
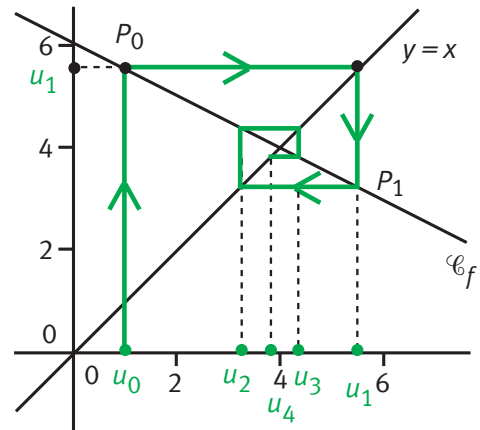
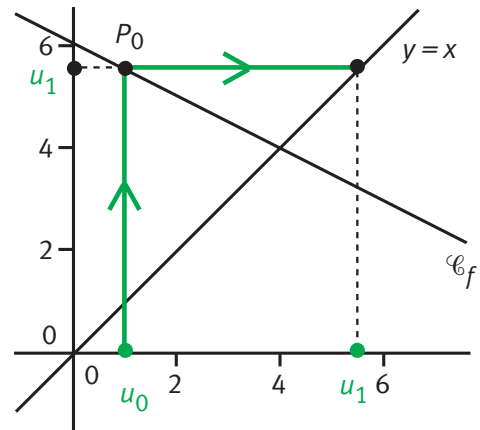
On poursuit le procédé de la même façon obtenant ainsi les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

On peut remarquer que, sous GeoGebra, on peut simplement obtenir en abscisse les réels successifs $u_0, u_1, u_2, \dots$ d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ connaissant u_0 en créant un curseur n sur un intervalle allant de 0 à 20 (par exemple) puis en entrant dans la barre de saisie (itération[$f(x), u_0, n, 0$], 0) et donc, sur notre exemple (itération[$6-0.5x, 1, n, 0$], 0). On active alors la trace du point créé et il suffit de faire varier le curseur pour obtenir les termes successifs de la suite. Par cette méthode, on peut observer rapidement le comportement de la suite ; en revanche, on perd de vue l'aspect géométrique de la construction.

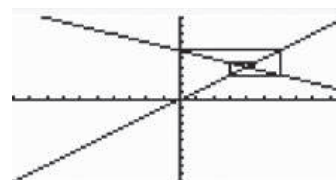
À l'aide de la calculatrice TI82 Stats.fr (ou TI83, TI84), les données ayant été entrées comme indiqué précédemment, puis dans le menu Format on choisit pour cette méthode de construction « Esc » (ou « Web »).

Après avoir déterminé la fenêtre graphique (dans notre exemple, la fenêtre standard convient), on obtient les tracés nécessaires en appuyant sur « graphe ». Pour visualiser la construction, on se place en mode « trace » puis on utilise les flèches.

À l'aide de la calculatrice CASIO Graph 35+, les données ayant été entrées comme indiqué précédemment, on utilise la fonction WEB (F4).



Après avoir déterminé la fenêtre graphique par SHIFT V-WIN (F3), on obtient les tracés nécessaires en appuyant sur « EXE » plusieurs fois.



- c) À l'aide des tableaux de valeurs et représentations graphiques obtenus, il semble que la suite (u_n) ne soit pas monotone (elle semble être alternée autour d'une certaine valeur). De plus, lorsque n devient grand, les termes de la suite (u_n) semblent tendre vers une valeur limite voisine de 4 qui graphiquement, semble correspondre à l'abscisse du point d'intersection des deux courbes tracées.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de (v_n) , on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$ or, par définition de (u_n) , on a $u_{n+1} = 6 - 0,5u_n$ donc $v_{n+1} = (6 - 0,5u_n) - 4 = 2 - 0,5u_n$.

Puis, de $v_n = u_n - 4$, on déduit $u_n = v_n + 4$.

On obtient donc $v_{n+1} = 2 - 0,5(v_n + 4) = 2 - 0,5v_n - 2 = -0,5v_n$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -0,5v_n$ ce qui signifie que la suite (v_n) est géométrique de raison $-0,5$.

Le terme initial de (v_n) vaut $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

- b) La suite (v_n) est géométrique de raison $-0,5$ et de terme initial $v_0 = -3$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3 \times (-0,5)^n$ puis, de $u_n = v_n + 4$, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - 3 \times (-0,5)^n$.
- c) La suite (v_n) est géométrique de raison $-0,5$ (la raison est strictement négative) donc elle est alternée et n'est pas monotone. En appliquant la fonction affine décroissante $x \mapsto 4 + x$ successivement à tous les termes de la suite, on s'aperçoit que les termes successifs de (u_n) sont alternativement inférieurs et supérieurs à 4. La suite (u_n) n'est donc pas monotone. Les termes successifs de (u_n) sont alternativement inférieurs et supérieurs à 4.
- d) Selon la conjecture effectuée précédemment, il semble que lorsque n devient grand, les termes de la suite (u_n) tendent vers une valeur limite voisine de 4 autrement dit, il semble que u_n puisse devenir aussi proche de 4 qu'on le souhaite, pourvu que n soit suffisamment grand.

n	$u(n)$	
5	4.0938	
6	3.9531	
7	4.0234	
8	3.9883	
9	4.0059	
10	3.9971	
11	4.0015	

$n=11$

Ainsi, imaginons que l'on souhaite trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $3,9 < u_n < 4,1$. On peut travailler à l'aide du tableau de valeurs obtenue à la calculatrice ou sur tableur pour constater, par balayage, que la condition semble vérifiée à partir de $n=5$. On remarquera cependant qu'on ne peut pas affirmer sans argument supplémentaire que tous les termes de la suite sont situés entre 3,9 et 4,1 à partir du rang 5.

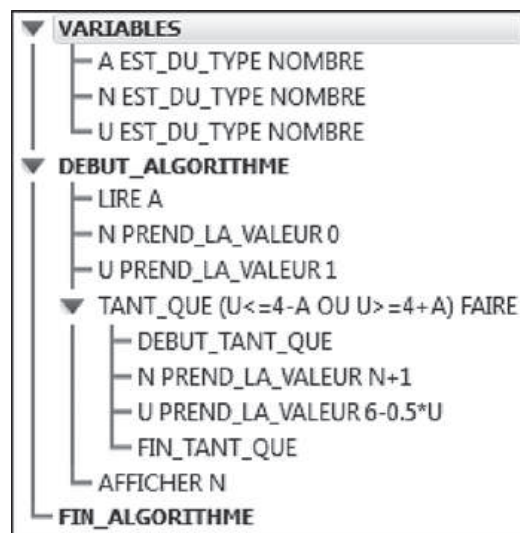
Si on souhaite trouver la plus petite valeur de n pour laquelle $3,99 < u_n < 4,01$, la même méthode conduit à conclure à choisir une valeur minimale de n égale à 9.

La démarche que l'on vient de suivre est une démarche algorithmique. Nous n'avons pas écrit l'algorithme à proprement parlé mais nous avons suivi un procédé qui nous a conduit à déterminer la valeur de n répondant au problème. En effet, en partant de $n=0$, nous avons observé la valeur de u_n , nous l'avons comparée à 3,9 et à 4,1 et nous avons poursuivi tant que la condition $3,9 < u_n < 4,1$ n'était pas vérifiée, c'est-à-dire tant que $u_n \leq 3,9$ ou $u_n \geq 4,1$. Dès que la condition était vérifiée, nous avons pu conclure.

Nous allons suivre cette démarche pour écrire un algorithme donnant la valeur minimale de n pour laquelle on a $4 - A < u_n < 4 + A$ où A est un réel quelconque.

Lire A	<i>on demande la valeur de A</i>
$N \leftarrow 0$	<i>on initialise l'indice de la suite à 0</i>
$U \leftarrow 1$	<i>U désignant les termes successifs de la suite, on précise la valeur de u_0</i>
Tant que $U \leq 4 - A$ ou $U \geq 4 + A$ faire	<i>on entre dans la boucle « tant que »</i>
$N \leftarrow N + 1$	<i>on incrémente l'indice</i>
$U \leftarrow 6 - 0,5 U$	<i>on calcule le terme de la suite suivant</i>
Fin du Tant que	<i>on sort de la boucle lorsque $4 - A < U < 4 + A$</i>
Afficher N	<i>on affiche la valeur de N obtenue lorsque $4 - A < U < 4 + A$</i>

On peut implémenter cet algorithme à l'aide du logiciel Algobox (ci-dessous) :



On peut implémenter cet algorithme à l'aide de la calculatrice (TI ou casio) :

```
PROGRAM:EXPLE1
:Prompt A
:0→N
:1→U
:While U≤4-A or
U≥4+A
:N+1→N
:6-0.5×U→U
:End
:Disp N
```

```
=====EXPLE1 =====
?→A
0→N
1→U
While U≤4-A Or U≥4+A
N+1→N
6-0.5×U→U
WhileEnd
N
[TOP] [BTM] [SRC] [MENU] [R↔L] [CHAR]
```

Il ne reste qu'à faire tourner ces programmes en vérifiant qu'ils fonctionnent bien pour les résultats que l'on a obtenus à l'aide du tableur, c'est-à-dire qu'ils renvoient respectivement $n=5$ et $n=9$ lorsque l'on choisit $A=0,1$ ou $A=0,01$. On peut ici choisir n'importe quelle valeur de A aussi petite soit elle et on peut constater qu'il faut choisir n de plus en plus grand pour que la condition soit réalisée.

Remarques

- La suite (u_n) proposée dans cet exemple a un terme général vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$. Cette suite n'est ni arithmétique (car $a \neq 1$) et ni géométrique (car $b \neq 0$). Son terme général a cependant une forme remarquable puisqu'il s'obtient en multipliant le précédent par un réel constant (aspect géométrique) et en lui ajoutant un réel constant (aspect arithmétique). Pour cette raison, une telle suite est dite arithmético-géométrique.
- La méthode utilisée ici pour étudier la suite (u_n) est générale. On commence par chercher l'unique solution α de l'équation $x = ax + b$. Puis on définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = u_n - \alpha$. On montre alors que (v_n) est géométrique de raison a ce qui permet d'exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

5. Exercices

Exercice A

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

- 1 Calculer les termes u_1 et u_2 .
- 2 La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 3 On admet que, pour tout n , u_n n'est pas nul. On pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.
 - a) Calculer les trois premiers termes de (v_n) .
 - b) Déterminer la nature de (v_n) .
 - c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .

► Solution

1. On a : $u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2}{5}$ et $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2+3 \times \frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$.
2. On a : $u_1 - u_0 = -\frac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 = -\frac{3}{20}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
Puis $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{8}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
3. a) On a : $v_0 = 1 + \frac{2}{u_0} = 3$, $v_1 = 1 + \frac{2}{u_1} = 6$ et $v_2 = 1 + \frac{2}{u_2} = 9$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_{n+1}} = 1 + \frac{2}{\frac{2u_n}{2+3u_n}} = \frac{2+4u_n}{u_n} = \frac{2}{u_n} + 4 = v_n + 3$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 3$.
La suite (v_n) est donc arithmétique de terme initial $v_0 = 3$ et de raison 3.

- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 + 3n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{v_n - 1}$ (en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$) donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2 + 3n}$.

Exercice B

On définit une suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 Calculer les premiers termes de la suite (u_n) . Que peut-on conjecturer concernant sa nature et son sens de variation ?
- 2 On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
 - b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n .
 - c) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n .

► Solution

- 1 On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2 \times 0 - 1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 2 \times 1 - 1 = \frac{3}{4}$,

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 \times 2 - 1 = \frac{27}{8}, \quad u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 2 \times 3 - 1 = \frac{107}{16}$$

et, au vu de ces résultats, (u_n) semble croissante à partir du rang 1, elle n'est ni arithmétique (car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$), ni géométrique (car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$).

- 2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a : } v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n+1) + 10 = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n + 6 = \frac{1}{2}u_n - 2n + 5$$

or $u_n = v_n + 4n - 10$ d'où $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 4n - 10) - 2n + 5 = \frac{1}{2}v_n$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ et (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 4 \times 0 + 10 = 11$.

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $u_n = v_n + 4n - 10$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_k + 4 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 10$

$$\text{or } \sum_{k=0}^n v_k = 11 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 22 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et $\sum_{k=0}^n 10 = \underbrace{10+10+\dots+10}_{n+1 \text{ termes}} = 10(n+1)$ ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 22 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + 4 \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1) = 22 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + 2n^2 - 8n - 10.$$

Exercice C

La suite (u_n) est une suite géométrique. Son premier terme vaut 5, une valeur approchée au centième de son onzième terme est 1008 enfin sa raison est un décimal négatif.

Que vaut la raison de la suite (u_n) ?

► Solution

La suite (u_n) est une suite géométrique de terme initial 5 donc, en notant q sa raison, le onzième terme vaut $5 \times q^{10}$.

On peut alors travailler par balayage à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=5*X^10
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

X	Y1
-2	5120
-1.9	3065.5
-1.8	1785.2
-1.7	1008
-1.6	549.76
-1.5	288.33
-1.4	144.63
X=-1.7	

X	Y1
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
-1.7	1008
X=-1.699995	

Il apparaît alors qu'une raison égale à $-1,7$ convient.

On peut remarquer que ça n'est pas la seule possibilité puisque, par exemple, une raison de $-1,699995$ convient tout autant.

Exercice D

On propose deux contrats d'embauche pour une durée déterminée d'un an.

Contrat 1 : un salaire au mois de janvier de 1100 euros puis une augmentation de 37,5 euros par mois.

Contrat 2 : un salaire au mois de janvier de 1100 euros puis une augmentation de t % par mois.

Déterminer le pourcentage à 0,01 près afin que les deux contrats soient équivalents.

► Solution

On remarque que les contrats seront considérés comme équivalents si la somme totale versée au terme des douze mois d'embauche est la même.

La suite des salaires obtenus selon le contrat 1 est une suite arithmétique de terme initial 1100 et de raison 37,5 ainsi, le salaire du mois de décembre vaut dans ce cas $1100 + 11 \times 37,5 = 1512,5$ de sorte que la somme des douze premiers salaires soit égale à $12 \times \frac{1100 + 1512,5}{2} = 15675$ euros.

La suite des salaires obtenus selon le contrat 2 est une suite géométrique de terme initial 1100 et de raison $1 + \frac{t}{100}$ ainsi la somme des douze premiers

salaires est égale à $1100 \frac{1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12}}{1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)} = -\frac{110000}{t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12}\right)$ euros.

Pour que les deux contrats soient équivalents, on cherche donc une valeur de t approchée au centième telle que $-\frac{110000}{t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12}\right) = 15675$.

On travaille par balayage à l'aide de la calculatrice (voir exercice C pour la démarche) ou d'un tableur en entrant les taux t dans la colonne A et le montant total dans la colonne B.

	B8				
	A	B	C	D	E
1	3	15611,2325			
2	3,01	15620,1043			
3	3,02	15628,9821			
4	3,03	15637,8657			
5	3,04	15646,7553			
6	3,05	15655,6508			
7	3,06	15664,5523			
8	3,07	15673,4597			
9	3,08	15682,3731			
10	3,09	15691,2924			
11	3,1	15700,2177			
12	3,11	15709,1489			
13	3,12	15718,0861			

Il apparaît dès lors qu'un taux d'accroissement mensuel d'environ 3,07 % pour le contrat 2 permet d'obtenir deux contrats équivalents.

2

Le raisonnement par récurrence

A

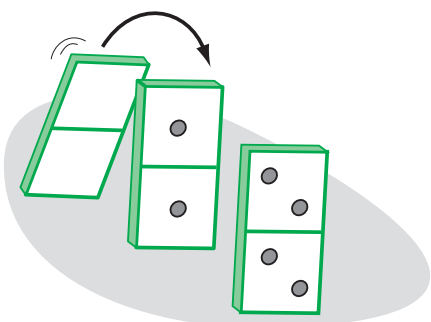
Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre, un nouvel outil de démonstration : le raisonnement par récurrence. Ce type de démonstration s'avère efficace pour résoudre beaucoup d'exercices sur les suites. On retrouve aussi ces raisonnements par récurrence dans tous les domaines des mathématiques (pour les spécialités maths de terminale S, par exemple, un certain nombre d'exercices d'arithmétiques nécessitent ce type de démonstration).

B

L'idée

1. Deux exemples très concrets



a) Imaginons que l'on dispose d'un certain nombre de dominos placés les uns à la suite des autres. Pour les faire tomber, il faut que deux conditions soient réunies : il faut faire tomber un domino et il faut que la chute d'un domino entraîne la chute du suivant. Lorsque ces deux conditions sont réunies, on admet naturellement que tous les dominos placés derrière le premier domino renversé vont tomber.

b) Imaginons que l'on dispose d'une échelle. Si on sait monter sur un barreau de l'échelle et si on sait passer d'un barreau quelconque à son suivant, on admet naturellement que l'on peut atteindre n'importe quel barreau situé au delà du premier barreau sur lequel on est monté.

C'est cette idée que nous allons formaliser.

2. Un exemple moins concret

Reprenons la suite (u_n) proposée dans l'exemple chapitre 1. 4) à savoir (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 6 - 0,5u_n$ et $u_0 = 1$. À la fin de l'exemple, nous avons montré que le plus petit entier n pour lequel $3,9 < u_n < 4,1$ était $n = 5$. En revanche, on ne sait pas si la condition $3,9 < u_n < 4,1$ est vérifiée pour tout $n \geq 5$.

On peut bien sûr calculer les termes suivants pour obtenir $u_5 = \frac{131}{32} \approx 4,094$, $u_6 = \frac{253}{64} \approx 3,953$ ou encore $u_7 = \frac{515}{128} \approx 4,023$ et constater que la proposition « $3,9 < u_n < 4,1$ » est vraie pour $n=6$, et $n=7$ mais est-elle vraie pour tout $n \geq 5$? Comment le démontrer puisque l'on ne peut pas faire une infinité de vérifications ?

La proposition « $3,9 < u_n < 4,1$ » est vraie au rang $n=5$. Autrement dit, le raisonnement a été initialisé, on sait renverser un domino ou encore on sait monter sur l'un des barreaux de l'échelle.

Supposons désormais que la proposition « $3,9 < u_n < 4,1$ » est vraie au rang $n=k$ autrement dit, supposons que $3,9 < u_k < 4,1$.

On a alors $-0,5 \times 4,1 < -0,5 u_k < -0,5 \times 3,9$ puis

$6 - 0,5 \times 4,1 < 6 - 0,5 u_k < 6 - 0,5 \times 3,9$ ce qui donne $3,95 < u_{k+1} < 4,05$ or $[3,95 ; 4,05] \subset [3,9 ; 4,1]$ donc $3,9 < u_{k+1} < 4,1$ et la proposition « $3,9 < u_n < 4,1$ » est vraie au rang $n=k+1$. On vient de démontrer que le fait que la proposition soit vraie au rang $n=k$ entraîne le fait qu'elle le soit au rang $n=k+1$. Autrement dit, la proposition est héréditaire, on sait que la chute d'un domino entraîne la chute du suivant ou encore on sait passer d'un barreau de l'échelle au suivant.

Les deux conditions (initialisation et hérédité) sont réunies, on peut donc conclure que pour tout $n \geq 5$, on a $3,9 < u_n < 4,1$.



L'axiome

Soit une proposition $\mathcal{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n .

Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de montrer que :

- (1) la proposition est vraie au rang n_0 ;
- (2) pour un entier k quelconque ($k \geq n_0$), $\mathcal{P}_k$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie.

Ainsi, pour démontrer par récurrence qu'une proposition liée à un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède en trois étapes.

Initialisation : On vérifie la proposition au rang initial n_0 .

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang quelconque k ($k \geq n_0$) et on démontre que, sous cette hypothèse, elle est vraie au rang suivant $k+1$.

On dit alors que la proposition est héréditaire. L'hypothèse « $\mathcal{P}_k$ vraie » est appelée hypothèse de récurrence.

Conclusion : L'axiome ci-dessus permet de conclure que la proposition est alors vraie pour tout $n \geq n_0$.

► Exemple 1 *Démontrer une propriété donnée*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3 - 2^n$.

► **Solution** On veut démontrer par récurrence que la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ » est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation : Au rang $n = 0$, la proposition s'écrit $u_0 = 3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$ or, par définition de (u_n) , on a $u_0 = 2$ ainsi la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose que la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ » est vraie pour un certain rang $n = k$ autrement dit, on suppose que pour un entier k positif, $u_k = 3 - 2^k$. Comme $u_{k+1} = 2u_k - 3$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire que $u_{k+1} = 2(3 - 2^k) - 3$ puis $u_{k+1} = 6 - 2 \times 2^k - 3$ ou encore $u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$ et la proposition « $u_n = 3 - 2^n$ » est vraie au rang $n = k + 1$. La proposition est donc héréditaire.

Initialisation : La proposition « $u_n = 3 - 2^n$ » est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3 - 2^n$.

► Exemple 2 *Conjecturer une propriété puis la démontrer*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.

En calculant les premiers termes de la suite, conjecturer l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer le résultat.

► **Solution** On a : $u_0 = 1$, $u_1 = 10u_0 - 9 \times 0 - 8 = 10 \times 1 - 0 - 8 = 2$,
 $u_2 = 10u_1 - 9 \times 1 - 8 = 10 \times 2 - 9 - 8 = 3$,
 $u_3 = 10u_2 - 9 \times 2 - 8 = 10 \times 3 - 18 - 8 = 4$, etc.

Il semble donc que pour tout $n \geq 0$, $u_n = n + 1$.

La proposition est vraie au rang $n = 0$ (et elle a même été vérifiée aux rangs $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$).

Supposons que pour $k \geq 0$, on ait $u_k = k + 1$ et, sous cette hypothèse, montrons que $u_{k+1} = k + 1 + 1$ à savoir $u_{k+1} = k + 2$.

Comme $u_{k+1} = 10u_k - 9k - 8 = 10(k + 1) - 9k - 8 = 10k + 10 - 9k - 8 = k + 2$, on a prouvé l'hérédité.

Finalement, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = n + 1$.

► Exemple 3 *L'importance de l'initialisation*

Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition « $10^n + 1$ est un multiple de 9 ».

1. Démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.
2. La proposition $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie pour tout $n \geq 0$? À partir d'un certain rang ?

► **Solution** 1. On suppose que pour k un entier naturel positif, $10^k + 1$ est un multiple de 9 et, sous cette hypothèse, on montre que $10^{k+1} + 1$ est un multiple de 9.

Dire que $10^k + 1$ est un multiple de 9 signifie que $10^k + 1 = 9N$ où N est un entier relatif ou encore $10^k = 9N - 1$ avec $N \in \mathbb{Z}$.

Sous cette hypothèse, on a :

$$10^{k+1} + 1 = 10 \times 10^k + 1 = 10 \times (9N - 1) + 1 = 90N - 10 + 1 = 90N - 9$$

donc $10^{k+1} + 1 = 9(10N - 1) = 9N'$ avec $N' = 10N - 1 \in \mathbb{Z}$ donc $10^{k+1} + 1$ est bien un multiple de 9 et la proposition est héréditaire.

2. Pour $n = 0$, la proposition s'écrit « $10^0 + 1$ est un multiple de 9 » autrement dit « 2 est un multiple de 9 » ce qui est évidemment faux. La proposition $\mathcal{P}_n$ n'est donc pas vraie pour tout $n \geq 0$. Étant héréditaire, elle peut être vraie à partir d'un certain rang dès qu'elle est vraie pour un certain rang ; encore faut-il le trouver...

On teste pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$ en s'interrogeant donc sur la divisibilité de 11, 101 ou 1001 par 9. Il apparaît que la proposition $\mathcal{P}_n$ n'est pas vraie pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$. Plutôt que de poursuivre les vérifications successives, on remarque qu'un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres dans son écriture en base 10 est un multiple de 9 or la somme des chiffres d'un nombre de la forme $10^n + 1$ vaut 2 quel que soit l'entier n . Par suite, l'entier $10^n + 1$ n'est jamais un multiple de 9 et la proposition « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » est fausse pour tout $n \geq 0$.

On retiendra donc de cet exemple qu'une proposition peut être héréditaire tout en étant toujours fausse ; c'est le cas d'un ensemble de dominos disposés suffisamment proches les uns des autres qui ne tombent pas si on n'en fait tomber aucun.

► Exemple 4 *L'importance de l'hérédité*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 100$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + E\left(\frac{u_n}{100}\right)$ où E est la fonction partie entière.

1. Établir une conjecture concernant une expression simple de u_n en fonction de n .
2. Cette relation est-elle vraie pour tout $n \geq 0$?

Remarque *Concernant la fonction partie entière*

La fonction partie entière est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on aura $E(x) = n$ pour tout x tel que $n \leq x < n+1$.

On a par exemple : $E(5,7) = 5$, $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(10) = 10$ ou $E(-0,2) = -1$.

Sur TI, on obtient la partie entière d'un réel x , en choisissant le menu MATH puis NUM et en sélectionnant partEnt (ou int sur les calculatrices en anglais).

Attention à ne pas confondre avec la fonction ent (ou iPart sur les calculatrices en anglais) qui permet d'obtenir la troncature à l'entier d'un réel.

Sur Casio, la partie entière d'un réel x s'obtient par le menu NUM (cliquer sur OPTN) en choisissant intg.

Sur tableur, la fonction permettant d'obtenir la partie entière d'un réel est la fonction ENT.

► **Solution** 1. On a : $u_0 = 100$,

$$u_1 = u_0 + E\left(\frac{u_0}{100}\right) = 100 + E\left(\frac{100}{100}\right) = 100 + E(1) = 100 + 1 = 101,$$

$$u_2 = u_1 + E\left(\frac{u_1}{100}\right) = 101 + E\left(\frac{101}{100}\right) = 101 + E(1,01) = 101 + 1 = 102,$$

puis, de la même façon, on peut poursuivre pour obtenir $u_4 = 104$, $u_5 = 105$ ou encore $u_6 = 106$.

Il semble donc que pour $n \geq 0$, $u_n = 100 + n$. Cette relation est-elle vraie pour tout $n \geq 0$?

2. Si on envisage que la proposition puisse être fausse, un contre-exemple suffirait à le démontrer. On peut donc poursuivre les vérifications en s'aidant éventuellement d'un tableur jusqu'à ce que l'on trouve un rang pour lequel la proposition n'est pas vraie.

La proposition « $u_n = 100 + n$ » étant vraie au rang $n = 0$ (ainsi qu'aux rangs 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 comme on l'a vérifié), elle sera vraie pour tout $n \geq 0$ si elle est héréditaire.

On peut donc envisager de démontrer que pour $k \geq 0$, entraîne

$$u_{k+1} = 100 + k + 1. \text{ Supposons que pour } k \geq 0, u_k = 100 + k$$

$$\text{alors } u_{k+1} = u_k + E\left(\frac{u_k}{100}\right) = 100 + k + E\left(\frac{u_k}{100}\right).$$

On pourra en déduire que $u_{k+1} = 100 + k + 1$ si on a $E\left(\frac{u_k}{100}\right) = 1$

ce qui signifie que $1 \leq \frac{u_k}{100} < 2$ ou encore $100 \leq u_k < 200$, soit $100 \leq 100 + k < 200$ ou encore $0 \leq k < 100$. Ceci démontre que la proposition est héréditaire pour tout $0 \leq k < 100$ autrement dit, pour tout $0 \leq u_k < 100$, entraîne $u_{k+1} = 100 + k + 1$. Ce raisonnement conduit à affirmer que $u_{100} = 200$.

Au rang suivant, on a :

$$u_{101} = u_{100} + E\left(\frac{u_{100}}{100}\right) = 200 + E\left(\frac{200}{100}\right) = 200 + E(2) = 200 + 2 = 202 \neq 201.$$

Ce qui permet d'affirmer que la relation conjecturée n'est pas vraie pour tout n .

On remarquera qu'obtenir ce résultat par vérification (à l'aide d'un tableur par exemple) est un raisonnement valable.

On retiendra qu'une proposition peut être vraie jusqu'à un certain rang, héréditaire jusqu'à un certain rang mais pas pour tous les rangs. C'est le cas d'un ensemble de dominos disposés suffisamment proches les uns des autres au départ puis trop espacés par la suite. On renverse le premier domino, les suivants tombent successivement jusqu'à ce que l'espace entre deux dominos soit trop important et que le procédé s'arrête.

► Exemple 5 *Une méthode pour démontrer qu'une suite est bornée*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout $n \geq 0$.

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $3 \leq u_n \leq 10$.

► **Solution** Tout d'abord, $u_0 = 10$ donc $3 \leq u_0 \leq 10$ et la proposition « $3 \leq u_n \leq 10$ » est vraie au rang $n = 0$.

Puis, supposons que pour un entier $k \geq 0$, on ait $3 \leq u_k \leq 10$ alors $9 \leq u_k + 6 \leq 16$ puis $3 \leq \sqrt{u_k + 6} \leq 4$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ ainsi $3 \leq u_{k+1} \leq 4$ ce qui implique $0 \leq u_{k+1} \leq 10$. La proposition est donc héréditaire.

Finalement, pour tout $n \geq 0$, $3 \leq u_n \leq 10$.

► Exemple 6 *Une méthode pour étudier les variations d'une suite*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout $n \geq 0$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

► **Solution** Pour démontrer que la suite (u_n) est décroissante, on peut raisonner par récurrence en démontrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » est vraie.

Initialisation : On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \sqrt{16} = 4$ donc $u_1 \leq u_0$ et la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit k un entier naturel quelconque tel que $u_{k+1} \leq u_k$. Alors $u_{k+1} + 6 \leq u_k + 6$ puis $\sqrt{u_{k+1} + 6} \leq \sqrt{u_k + 6}$ ou encore $u_{k+2} \leq u_{k+1}$. Ainsi, la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » est héréditaire.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition « $u_{n+1} \leq u_n$ » est vraie. La suite (u_n) est donc décroissante.

Remarques

- On peut regrouper les questions des exemples 5 et 6 en une seule question, à savoir : démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$. On montre alors à l'aide d'une seule démonstration par récurrence que la suite (u_n) est une suite bornée et décroissante.

- Pour étudier les variations de (u_n) , on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ (mais c'est plus long !): pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 6} - u_n = \frac{u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 6} + u_n}$

En admettant le résultat démontré à l'exemple 5 ci-dessus, on sait que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 3$.

Le dénominateur est alors strictement positif comme somme de deux nombres strictement positifs donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe du numérateur.

Le trinôme $-x^2 + x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 = 5^2$ et pour racines -2 et 3 de sorte que $-x^2 + x + 6$ est du signe de $-x^2$ sur $]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$. D'une part pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 3$ et d'autre part pour tout $x \geq 3$, $-x^2 + x - 6 \leq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n^2 + u_n + 6 \leq 0$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et (u_n) est décroissante.



Exercices d'apprentissage

Exercice 1

Soient $(e_n)_{n \geq 1}$ et $(c_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par $e_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$ et $c_n = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

- 1 Calculer les premiers termes des suites (e_n) et (c_n) . Quelle relation semble lier e_n et c_n ?
- 2 Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $c_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ puis conclure.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3

Démontrez que, pour tout entier naturel n , l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Exercice 4

La suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout entier naturel n .

- 1 Représenter graphiquement la suite (u_n) . En dresser un tableau de valeurs puis conjecturer son sens de variations.

- 2 a) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+3}$ est croissante sur $[0 ; 1]$.
- b) Démontrer par récurrence que (u_n) est une suite décroissante à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Exercice 6 *Préambule*

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n!$ et on lit « factorielle de n », le nombre définit par : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

Ainsi on a $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, etc.

On peut enfin remarquer que, pour tout $n \geq 1$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

- 1 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
- 2 Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $n! \geq 2^n$.

3

Notions de limites

A

Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre, les notions de limites, les définitions qu'il faudra connaître et savoir utiliser pour démontrer certains résultats ainsi que les théorèmes dont il faudra, sauf mention contraire, connaître les démonstrations et qu'il faudra savoir utiliser (par, exemple, pour déterminer une limite).

B

Pour débiter

■ Activité 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 3u_n + 3}.$$

- a) Représenter la suite (u_n) de deux façons : l'une pour laquelle on placera u_n en ordonnée et n en abscisse, l'autre pour laquelle les termes successifs de la suite seront placés en abscisse (voir le point 4 du chapitre 1 de cette séquence).
Au vu de ces représentations graphiques, quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de u_n pour de grandes valeurs de n ?
- b) Établir un tableau de valeurs de u_n .
Quelle semble être la limite de la suite (u_n) lorsque n devient grand ?
- c) Le nombre $|u_n - 1|$ permet ici de mesurer la distance entre u_n et sa limite 1. Il semble que l'on puisse rendre ce nombre aussi petit qu'on le souhaite pourvu que n soit suffisamment grand.
C'est ce que l'on va constater sur quelques exemples. A l'aide du tableau de valeur précédent, déterminer un rang au delà duquel $|u_n - 1| < 10^{-2}$ puis $|u_n - 1| < 10^{-5}$ et enfin $|u_n - 1| < 10^{-8}$.

■ Activité 2 Une activité autour de suites de référence.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

n	100	1000	10^6	10^{10}
$\frac{1}{\sqrt{n}}$				
$\frac{1}{n}$				
$\frac{1}{n^2}$				
$\frac{1}{n^3}$				

b) Quelle semble être la limite des suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^3}\right)$?

c) Déterminer un rang N au delà duquel $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-2}$ puis $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-18}$ et enfin $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 10^{-30}$.

d) Faire de même avec les trois autres suites.

■ Activité 3 Une autre activité autour de suites de référence.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

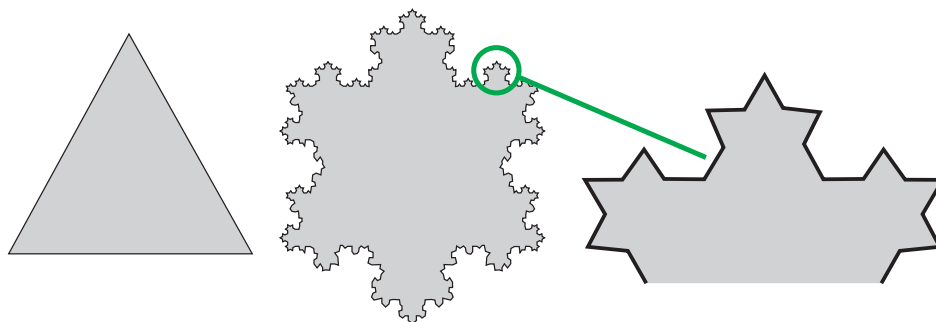
n	100	1000	10^6	10^{10}
$\sqrt{n}$				
n^2				
n^3				

b) Quelle semble être la limite des suites $\left(\sqrt{n}\right)$, $\left(n^2\right)$ et $\left(n^3\right)$?

c) Déterminer un rang N au delà duquel $\sqrt{n} > 10^3$ puis $\sqrt{n} > 10^{10}$ et enfin $\sqrt{n} > 10^{30}$.

d) Faire de même avec les deux autres suites.

■ Activité 4 Le flocon de Von Koch



Pour obtenir le flocon de Von Koch (figure du milieu), on procède de la façon suivante.

À l'étape initiale (étape 0), on considère un triangle équilatéral (figure de gauche) de côté 10 cm (par exemple). La figure initiale a donc 3 côtés de longueur 10 cm pour un périmètre total de 30 cm et une aire de $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (à savoir environ $43,3 \text{ cm}^2$).

À l'étape 1, on partage chacun des côtés de la figure précédente en 3 et, sur le segment central, on construit un triangle équilatéral. La figure obtenue après une étape comporte donc 12 côtés de longueur $\frac{10}{3}$ cm (à savoir environ 3,3 cm) pour un périmètre total de 40 cm et une aire de $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ (à savoir environ $57,7 \text{ cm}^2$).

On poursuit ainsi la construction du flocon en partageant chacun des côtés de la figure obtenue à l'étape précédente en 3 et en construisant un triangle équilatéral sur le segment central.

On nomme respectivement C_n , L_n , P_n et A_n le nombre de côtés, la longueur de chaque côté, le périmètre et l'aire du flocon après n étapes.

Ainsi $C_0 = 3$, $C_1 = 12$, $L_0 = 10$, $L_1 = \frac{10}{3}$, etc.

- Intuitivement que peut-on penser du comportement de chacune des quatre suites (C_n) , (L_n) , (P_n) et (A_n) pour de grandes valeurs de n (variations, limites éventuelles) ?
- À l'aide d'un tableur, créer et organiser une feuille de calculs permettant d'obtenir (C_n) , (L_n) , (P_n) et (A_n) en fonction de l'étape n . Confirmer ou infirmer les conjectures faites à la question précédente.
- En supposant que le triangle de départ ait des côtés de longueur 10 cm. Le périmètre du flocon peut-il dépasser un kilomètre ? Si oui, après combien d'étapes et quelle serait la valeur correspondante de l'aire du flocon ?

1. Suites convergentes

a) Définitions et premières propriétés

Définition 1

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite un réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Lorsqu'une suite (u_n) admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente (ou qu'elle converge).

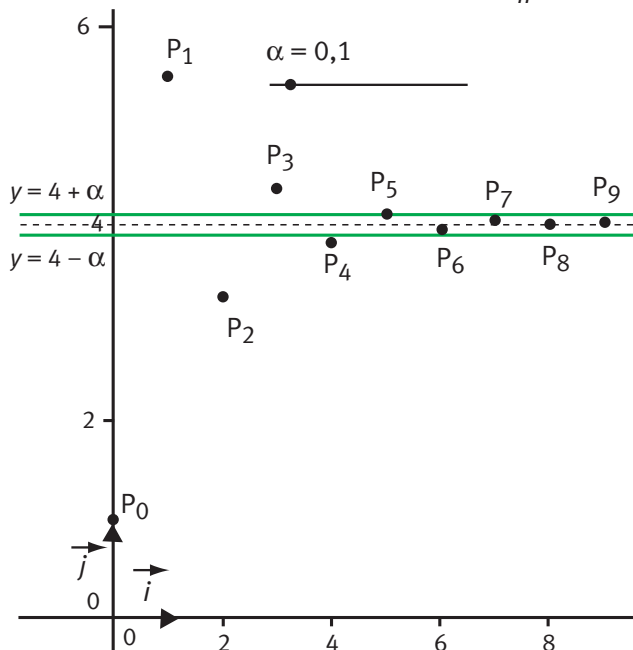
Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Remarque

On remarque que montrer que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, revient à montrer que tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En pratique, on considérera donc fréquemment comme intervalles contenant ℓ , des intervalles de la forme $] \ell - \alpha ; \ell + \alpha [$ où α est un réel strictement positif.

Interprétation graphique

De la définition, on obtient que pour tout α aussi petit que l'on veut, il existe un rang au delà duquel u_n appartient à $] \ell - \alpha ; \ell + \alpha [$.



En nommant P_n les points de coordonnées $(n; u_n)$, la convergence de (u_n) signifie donc pour tout α aussi petit que l'on veut, il existe un rang au delà duquel P_n entre dans une bande limitée par les droites d'équations $y = \ell - \alpha$ et $y = \ell + \alpha$ pour ne plus jamais en ressortir.

Le graphique ci-contre illustre la convergence vers $\ell = 4$ de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 6 - 0,5u_n$ et $u_0 = 1$ (à rapprocher du Chapitre 1, 4).

► Exemple 7 En utilisant la définition de la convergence d'une suite, démontrer que :

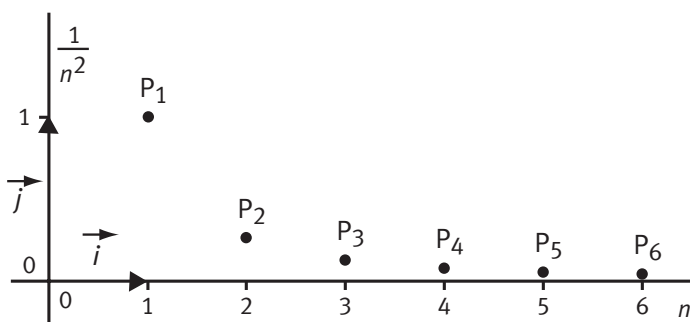
a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

b) La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$ admet pour limite 1.

Remarque En général, on ne revient pas à la définition de la notion de limites pour déterminer les limites des suites proposées mais on utilise les propriétés sur les limites usuelles, les règles opératoires sur les limites ainsi que les différents théorèmes qui seront vus dans la suite de cette partie.

► **Solution** a) On souhaite démontrer que le nombre $\frac{1}{n^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque n devient aussi grand que l'on veut. Intuitivement, le résultat semble naturel.

Par ailleurs, une représentation graphique de la suite de terme général $\frac{1}{n^2}$ permet de visualiser le résultat.



Pour prouver le résultat à l'aide de la définition, on est amené à démontrer que tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

L'intervalle $] -r ; r[$ où r est un réel strictement positif est un intervalle ouvert contenant 0.

Puis : $\frac{1}{n^2} \in] -r ; r[\Leftrightarrow -r < \frac{1}{n^2} < r$ or $n > 0$ donc

$$-r < \frac{1}{n^2} < r \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^2} < r \Leftrightarrow n^2 > r \Leftrightarrow n > \sqrt{r}.$$

Ainsi, on a : $\frac{1}{n^2} \in] -r ; r[$ dès que $n > \sqrt{r}$.

En posant N l'entier qui suit $\sqrt{r}$, on a donc démontré que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n^2} \in] -r ; r[$. D'où le résultat.

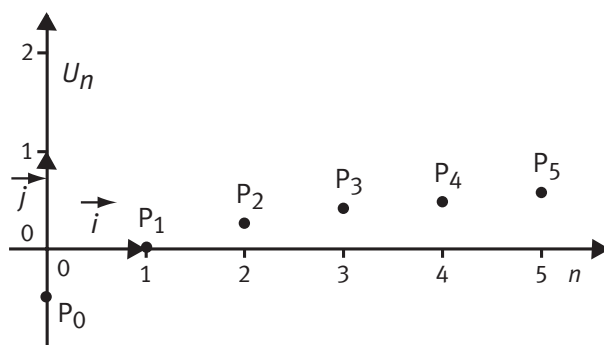
Remarque On peut adapter la démarche ci-dessus pour montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \text{ ou plus généralement}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

b) Comme on peut le voir ci-contre, une illustration graphique ou à l'aide d'un tableur permet d'avoir une idée du comportement de la suite (u_n) .

Pour démontrer la convergence de (u_n) vers 1, on montre que tout intervalle ouvert centré en 1 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



	A	B
1	n	Un
2	0	-0.5
3	1	0
4	2	0.25
5	3	0.4
6	4	0.5
7	5	0.57

L'intervalle $]1-r; 1+r[$ où r est un réel strictement positif est un intervalle ouvert contenant 1.

$$\begin{aligned} \text{Puis : } u_n \in]1-r; 1+r[&\Leftrightarrow 1-r < \frac{n-1}{n+2} < 1+r \Leftrightarrow -r < \frac{n-1}{n+2} - 1 < r \\ &\Leftrightarrow -r < \frac{-3}{n+2} < r \Leftrightarrow -r < \frac{-3}{n+2} \text{ et } \frac{-3}{n+2} < r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } n+2 > 0 \text{ et } r > 0 \text{ donc } -r < \frac{-3}{n+2} &\Leftrightarrow n+2 > \frac{3}{r} \Leftrightarrow n > -2 + \frac{3}{r} \\ \text{et } \frac{-3}{n+2} < r &\Leftrightarrow n+2 > -\frac{3}{r} \Leftrightarrow n > -2 - \frac{3}{r}. \end{aligned}$$

Le plus grand des deux nombres $-2 - \frac{3}{r}$ et $-2 + \frac{3}{r}$ étant clairement $-2 + \frac{3}{r}$ on note N l'entier qui suit $-2 + \frac{3}{r}$ pour obtenir que pour tout $n \geq N$, $u_n \in]1-r; 1+r[$ d'où la convergence de (u_n) vers 1.

Remarque On peut noter au passage que pour montrer la convergence de (u_n) vers 1, on a prouvé la convergence vers 0 de la suite de terme général $u_n - 1$.

► **Exemple 8** En utilisant la définition de la convergence d'une suite, montrer que toute suite convergente est bornée.

► **Solution** Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel, convergente vers un réel ℓ . Ainsi, pour un réel r quelconque, on sait trouver un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\ell - r < u_n < \ell + r$ donc (u_n) est bornée à partir du rang N .

En notant m le plus petit des nombres $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell - r$ et M le plus grand des nombres $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell + r$ on obtient que pour tout $n \geq N$, $m \leq u_n \leq M$ ce qui signifie que (u_n) est bornée.

Remarque On peut ici raisonner en choisissant une valeur particulière pour r , par exemple $r = 1$.

Propriété 1 Limites de suites usuelles

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ et plus

généralement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

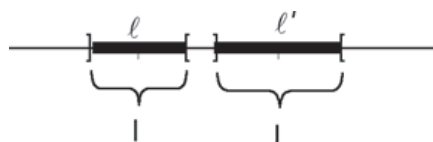
- Toute suite constante de terme général égal à ℓ est convergente vers ℓ .

Propriété 2 Unicité de la limite

Si une suite converge alors sa limite est unique.

■ Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Pour commencer, supposons qu'une suite (u_n) converge et qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' .



Nécessairement, l'une est strictement inférieure à l'autre, par exemple $\ell < \ell'$.

On peut donc trouver un intervalle ouvert I contenant ℓ et un intervalle ouvert J contenant ℓ' qui ne se chevauchent pas.

La suite (u_n) étant convergente vers ℓ , tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I à partir d'un certain rang N et, (u_n) étant convergente vers ℓ' , tous les termes de la suite sont dans l'intervalle J à partir d'un certain rang N' . Donc, pour tout n à la fois supérieur à N et N' , le terme u_n se trouve à la fois dans l'intervalle I et dans l'intervalle J , ce qui est impossible. L'hypothèse que nous avons émise au départ est donc absurde et (u_n) ne peut donc pas converger vers deux limites distinctes.

b) Opérations sur les limites

Propriété 3 Opération sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' .

On admet les résultats suivants :

- la suite de terme général $u_n + v_n$ est convergente et a pour limite $\ell + \ell'$;
- la suite de terme général $u_n \times v_n$ est convergente et a pour limite $\ell \times \ell'$;
- la suite de terme général $k \times u_n$ où k est un réel est convergente et a pour limite $k \times \ell$;
- si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si $\ell' \neq 0$ alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est convergente et a pour limite $\frac{\ell}{\ell'}$.

► Exemple 9 Déterminer la limite des suites de termes généraux :

$$a_n = \frac{3n^2 + n - 1}{n^2}, \quad b_n = \frac{n^2 - 4}{n^2 + 2n}, \quad c_n = \frac{3n^2 - n + 1}{n^3 + 2n} \text{ et } d_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}.$$

► Solution

Dans chaque cas, on amène à transformer l'expression de la suite de façon à utiliser les règles opératoire-ci-dessus.

- Pour $n > 0$, $a_n = \frac{3n^2 + n - 1}{n^2} = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$.

- Pour $n > 0$, $b_n = \frac{n^2 - 4}{n^2 + 2n} = \frac{(n-2)(n+2)}{n(n+2)} = \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc,
par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ puis, par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$.

On remarque que l'on peut proposer une autre transformation de b_n pour obtenir le résultat.

$$\text{En effet, pour } n > 0, \quad b_n = \frac{n^2 - 4}{n^2 + 2n} = \frac{n^2(1 - \frac{4}{n^2})}{n^2(1 + \frac{2}{n})} = \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 \text{ ce qui}$$

conduit, par quotient, à $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$.

Cette deuxième transformation est fréquemment utilisée lorsque le terme général de la suite est une expression rationnelle en n ainsi qu'on peut le constater dans l'exemple suivant.

On observera que, dans ce cas, on transforme l'expression de départ en factorisant numérateur et dénominateur par leur monôme de plus haut degré en n .

• Pour $n > 0$,
$$c_n = \frac{3n^2 - n + 1}{n^3 + 2n} = \frac{n^2(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^3(1 + \frac{2}{n^2})} = \frac{1}{n} \times \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}.$$

D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = 1$ ainsi par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 3.$

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et par produit, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0.$

- Bien que le terme d_n ne soit pas rationnel en n , on peut adopter une démarche analogue à celle utilisée précédemment.

Pour $n > 2$,
$$d_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}} = \frac{1}{n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1$ puis par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = 1.$$

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, et par produit, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0.$

c) Théorèmes de comparaison et d'encadrement

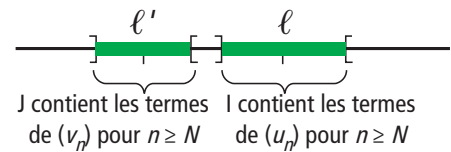
Propriété 4 *Compatibilité avec l'ordre*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' .

Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$ (ou bien $u_n \leq v_n$) alors $\ell \leq \ell'$.

■ Démonstration

Supposons que $\ell > \ell'$.



On peut donc trouver un intervalle ouvert I contenant ℓ et un intervalle ouvert J contenant ℓ' qui ne se chevauchent pas.

La suite (u_n) converge vers ℓ donc il existe un rang N_1 à partir duquel I contient tous les termes de (u_n) .

De même, il existe un rang N_2 à partir duquel J contient tous les termes de (v_n) .

En notant N le plus grand des entiers N_1 et N_2 , pour tout $n \geq N$, I contient les nombres u_n alors que J contient les nombres v_n (voir illustration) et donc $u_n > v_n$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse de la propriété.

Donc $\ell \leq \ell'$.

■ Conséquence

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante et convergente vers ℓ alors, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \ell$.

■ Démonstration

Soit $n \geq n_0$.

Pour tout $p \geq n$, on a $u_p \geq u_n$ car la suite (u_n) est croissante, or la convergence de la suite vers ℓ se traduit par $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \ell$. De plus, u_n ne dépendant pas de p , on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = u_n$. Ainsi, par passage à la limite en p dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\ell \geq u_n$. Finalement, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \ell$.

Remarque

De façon analogue, on a :

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite décroissante et convergente vers ℓ alors, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq \ell$.

On admet le résultat suivant appelé « théorème des gendarmes ».

Théorème 1

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Si (u_n) et (w_n) sont convergentes vers un même réel ℓ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (v_n) est elle aussi convergente vers ℓ .

► Exemple 10 Déterminer la limite des suites de terme général : $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $b_n = \frac{\sin n - 2n}{n+1}$.

► **Solution** • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ or, pour $n > 0$, $n^2 > 0$ donc pour $n > 0$,

$$-\frac{1}{n^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ et d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-1 - 2n \leq \sin n - 2n \leq 1 - 2n$ or $n+1 > 0$
 donc $\frac{-1-2n}{n+1} \leq b_n \leq \frac{1-2n}{n+1}.$

D'une part, $\frac{-1-2n}{n+1} = \frac{n(-\frac{1}{n}-2)}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{-\frac{1}{n}-2}{1+\frac{1}{n}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}-2\right) = -2$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1-2n}{n+1} = -2.$

D'autre part, on montre de façon analogue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2n}{n+1} = -2.$

Ainsi, par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -2.$

► Exemple 11 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$, par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+\sqrt{0}} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

a) En remarquant que les $n+1$ termes constituant la somme u_n sont tous compris entre $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{n}$, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}.$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

► **Solution** a) Pour $n \geq 1$ et pour $0 \leq k \leq n$, on a $0 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ puis $n \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n}$ et, par inversion $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$ donc chacun des $n+1$ termes de la somme constituant u_n est supérieur à $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ d'où $u_n \geq (n+1) \times \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ et inférieur à $\frac{1}{n}$ d'où $u_n \leq (n+1) \times \frac{1}{n}.$

Finalement pour tout $n \geq 1$, $\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}.$

b) D'une part $\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ puis par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = 1$.

D'autre part $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit la convergence de (u_n) vers 1.

2. Suites divergentes ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

a) Définitions et premières propriétés

Définition 2

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De façon analogue, on dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty ; A[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Dans un cas comme dans l'autre, on dit que la suite est divergente.

► Exemple 12 a) En utilisant la définition, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

b) La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{101-n^2}{2n+1}$.

- À l'aide d'un tableur, conjecturer l'éventuelle limite de la suite (u_n) .
- Montrer que l'on peut trouver un rang au-delà duquel $u_n \leq -100$.
- En utilisant la définition, démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

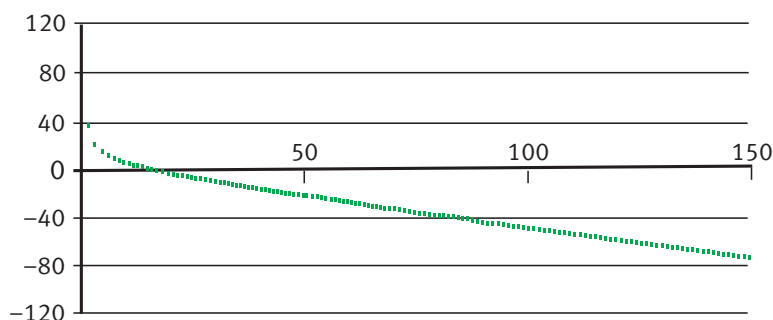
En général, on ne revient pas à la définition de la notion de limites pour déterminer les limites des suites proposées mais on utilise les propriétés sur les limites usuelles, les règles opératoires sur les limites ainsi que les différents théorèmes qui seront vus dans la suite de cette partie.

- **Solution** a) Par définition, on est amené à déterminer un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $n^2 \geq A$ où A est un réel quelconque (aussi grand qu'on le veut ce qui permet de se restreindre au cas où $A \geq 0$).

Alors, n étant positif, $n^2 \geq A \Leftrightarrow n \geq \sqrt{A}$ et, en choisissant N l'entier qui suit $\sqrt{A}$ on obtient que si $n \geq N$ alors $n^2 \geq A$ ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

- b) À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, il semble que la suite (u_n) tende vers $-\infty$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	101
3	1	33,33333333
4	2	19,4
5	3	13,1428571
	⋮	⋮
154	150	-74,4152824
155	151	-74,9174917
156	152	-75,4196721
157	153	-75,9218241
158	154	-76,4239482



$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, u_n \leq -100 &\Leftrightarrow \frac{101-n^2}{2n+1} \leq -100 \Leftrightarrow 101-n^2 \leq -100(2n+1) \\ &\Leftrightarrow n^2 - 200n - 201 \geq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 200x - 201$ a pour discriminant $\Delta = 40804 = 202^2$ et donc pour racines -1 et 201 .

De plus, $x^2 - 200x - 201$ est positif à l'extérieur de ses racines et $n \geq 0$ donc pour tout $n \geq 201$, $u_n \leq -100$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \in \mathbb{N}, u_n \leq A &\Leftrightarrow \frac{101-n^2}{2n+1} \leq A \Leftrightarrow 101-n^2 \leq A(2n+1) \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2An - 101 + A \geq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 + 2Ax - 101 + A$ a pour discriminant $\Delta = 4A^2 - 4A + 404$.
Le trinôme $4A^2 - 4A + 404$ a lui même un discriminant strictement négatif ($-6448 < 0$) donc il ne s'annule pas de sorte que pour tout $A \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$.

Ainsi, $x^2 + 2Ax - 101 - A$ a pour racines

$$-A - \sqrt{A^2 - A + 101} \text{ et } -A + \sqrt{A^2 - A + 101}.$$

En remarquant que $-A - \sqrt{A^2 - A + 101} \leq -A + \sqrt{A^2 - A + 101}$ et sachant que $x^2 + 2Ax - 101 - A$ est positif à l'extérieur de ses racines, on a $x^2 + 2Ax - 101 - A \geq 0$ pour $x \geq -A + \sqrt{A^2 - A + 101}$. On peut enfin remarquer que dès que $A \leq 0$, $-A + \sqrt{A^2 - A + 101} \geq 0$ comme somme de deux nombres positifs.

Finalement, en notant N l'entier qui suit $-A + \sqrt{A^2 - A + 101}$, on a pour tout $n \geq N$, $u_n \leq A$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété 5 Limites de suites usuelles

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

et plus généralement $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Opérations sur les limites

On admet les propriétés intuitives suivantes.

Propriété 6 Somme

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont les rôles peuvent être inversés.

La limite de la somme $u_n + v_n$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$		$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

Une case coloriée signifie qu'on est en présence de « formes indéterminées », c'est-à-dire que la propriété ne permet pas de conclure puisque le résultat dépend de la situation dans laquelle on se trouve.

Pour illustrer la situation, considérons les exemples suivants.

Prenons $u_n = 3n$ et $v_n = -n$.

Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ or $u_n + v_n = 2n$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Prenons maintenant $u_n = 2n$ et $v_n = -3n$.

Comme précédemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ mais $u_n + v_n = -n$ et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

Enfin, prenons $u_n = n+2$ et $v_n = -n+1$. Encore une fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ avec $u_n + v_n = 3$ et cette fois-ci $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 3$.

On constate que la conclusion dépend du cas dans lequel on se trouve.

Propriété 7 Produit

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont les rôles peuvent être inversés.

La limite du produit $u_n \times v_n$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0		
$\ell \ (\ell > 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \ (\ell < 0)$	$-\infty$	$+\infty$

Remarques

- Comme précédemment, une case coloriée signifie qu'on est en présence de « formes indéterminées », c'est-à-dire que la propriété ne permet pas de conclure puisque le résultat dépend de la situation dans laquelle on se trouve.

Pour illustrer la situation, considérons les exemples suivants.

Prenons $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
 or $u_n \times v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

Prenons maintenant $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n^3$. Comme précédemment $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ mais $u_n \times v_n = n$ et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.

Enfin, prenons $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n^2$. Encore une fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ mais $u_n \times v_n = 1$ et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = 1$.

On constate que la conclusion dépend du cas dans lequel on se trouve.

- Lorsque l'une des suites converge vers un réel ℓ et que l'autre diverge en ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, on sait que le produit tend vers l'infini mais il est nécessaire d'argumenter en précisant le signe de ℓ pour pouvoir conclure.

Par exemple, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$ alors que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.

Propriété 8 Inversion

Soient (u_n) une suite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right)$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$\ell (\ell \neq 0)$	$\frac{1}{\ell}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

Remarques

Lorsqu'une suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, tend vers 0 et garde un signe constant au voisinage de l'infini (c'est-à-dire à partir d'un certain rang), son inverse tend vers l'infini et la connaissance du signe de v_n pour n au voisinage de $+\infty$ permet de conclure.

Par exemple, pour $v_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ or, pour $n > 0$, $v_n > 0$ donc on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right) = +\infty$ (ce qui est aisément vérifiable car $\frac{1}{v_n} = n$).

Alors que pour $v_n = \frac{1}{1-n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ or, pour $n > 1$, $v_n < 0$ donc on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right) = -\infty$ (ce que l'on peut obtenir en remarquant que $\frac{1}{v_n} = 1-n$).

Pour préciser qu'une suite tend vers 0 en étant strictement positive pour n au voisinage de $+\infty$, on peut noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0_+$ ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$ pour n suffisamment grand.

De façon analogue, pour préciser qu'une suite tend vers 0 en étant strictement négative pour n au voisinage de $+\infty$, on peut noter $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0_-$ ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n < 0$ pour n suffisamment grand.

Propriété 9 Quotient

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

La limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$					
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$\ell' (\ell' \neq 0)$
$+\infty$			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$-\infty$			$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
0	0	0			0
$\ell (\ell > 0)$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell (\ell < 0)$	0	0	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$

Remarques Puisque $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$, on notera que :

- les différentes formes indéterminées observées ici découlent des cas d'indétermination constatées dans le cas des limites par produit et par inversion ;
- comme précédemment, on peut parfois conclure à une limite infinie mais le choix entre $+\infty$ ou $-\infty$ résulte de l'étude du signe des suites pour de grandes valeurs de n .

► Exemple 13 Déterminer la limite des suites de terme général :

$$a_n = 3n^2 + n + 5, b_n = 8n - n^3, c_n = \frac{3n^2 - n}{1 - n^2}, d_n = \sqrt{n} - n \text{ et } e_n = \frac{\sqrt{n} - n}{2n + 1}.$$

► **Solution** • On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 5) = +\infty \text{ ainsi, par somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

- Le raisonnement ci-dessus conduit à une indétermination, il est donc nécessaire de transformer l'expression de b_n .

$$\text{Par exemple, pour } n \in \mathbb{N} : b_n = 8n - n^3 = n(8 - n^2).$$

D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et, d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - n^2) = -\infty.$$

Finalement, par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$.

On remarque que la transformation $b_n = 8n - n^3 = n^3 \left(\frac{8}{n^2} - 1 \right)$ pour $n > 0$ permettait aussi de conclure.

On remarque que, dans ce cas, la transformation d'écriture effectuée sur b_n est une factorisation par le monôme de plus haut degré, démarche que l'on a déjà rencontrée précédemment.

- Dans cet exemple, on peut montrer que le numérateur tend vers $+\infty$ alors que le dénominateur tend vers $-\infty$ ce qui est un cas d'indétermination. On transforme alors c_n en factorisant numérateur et dénominateur par le monôme de plus

$$\text{haut degré. Pour } n > 0, c_n = \frac{3n^2 - n}{1 - n^2} = \frac{n^2(3 - \frac{1}{n})}{n^2(\frac{1}{n^2} - 1)} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - 1}.$$

D'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} \right) = 3$ et, d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -1.$$

Par quotient, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -3$. La suite (c_n) est donc convergente.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sqrt{n} - n$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure, nous sommes face à un cas d'indétermination et il est nécessaire de transformer l'expression de d_n pour lever cette indétermination. On remarque que n tend plus vite vers $+\infty$ que $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, l'idée est d'adopter la démarche rencontrée ci-dessus en factorisant d_n par le terme dominant, c'est-à-dire celui qui tend le plus vite vers $+\infty$.

Alors, pour $n > 0$, $d_n = \sqrt{n} - n = n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -1$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$.

On remarque que c'est une transformation possible de d_n car on pouvait aussi écrire que pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sqrt{n} - n = \sqrt{n}(1 - \sqrt{n})$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{n}) = -\infty$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$.

- Pour $n > 0$, $e_n = \frac{\sqrt{n} - n}{2n + 1} = \frac{n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{2 + \frac{1}{n}}$.

On montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$ donc par quotient, la suite (e_n) est convergente et admet pour limite $-\frac{1}{2}$.

Point méthode

Pour lever des indéterminations lors du calcul de limites en $+\infty$, on est fréquemment amené à factoriser l'expression de départ par le terme dominant.

En particulier :

- lorsque u_n est une expression polynomiale en n , c'est-à-dire lorsque

$$u_n = a_p \times n^p + a_{p-1} \times n^{p-1} + \dots + a_1 \times n + a_0$$

où les coefficients a_i sont des réels, on pensera lorsque c'est nécessaire, à factoriser u_n par le monôme de plus haut degré à savoir par $a_p \times n^p$ ou par n^p ;

- lorsque u_n est une expression rationnelle en n , c'est-à-dire lorsque u_n est le quotient de deux expressions polynomiales en n , on pensera lorsque c'est nécessaire à factoriser le numérateur et le dénominateur par leur monôme de plus haut degré.

c) Théorèmes de comparaison

Propriété 10 *Comparaison à l'infini*

Les suites (u_n) et (v_n) sont telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

■ Démonstration

- À partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc, étant donné un réel A quelconque, on peut trouver un rang N au delà duquel $u_n > A$ et $u_n \leq v_n$. Par suite, pour tout $n \geq N$, $v_n > A$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Le deuxième point peut se démontrer de façon analogue ou bien on peut se ramener à utiliser ce que l'on vient de démontrer. En effet, on remarque qu'à partir d'un certain rang $-v_n \leq -u_n$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-v_n) = +\infty$ et le point démontré précédemment permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

► Exemple 14 Déterminer la limite des suites de terme général :

$$a_n = n^2 + (-1)^n \text{ et } b_n = 2\cos n - n^3.$$

- **Solution**
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n^2 - 1 \leq a_n \leq n^2 + 1$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ donc, par comparaison à l'infini, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq 2\cos n \leq 2$ donc $-2 - n^3 \leq b_n \leq 2 - n^3$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - n^3) = -\infty$ donc, par comparaison à l'infini, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$.

3. Exemples de suites divergentes n'ayant pas de limite

Il y a deux types de suites divergentes, celles qui ont pour limite $\pm\infty$ ainsi qu'on a pu le voir dans le paragraphe 2 et celles qui n'ont pas de limite.

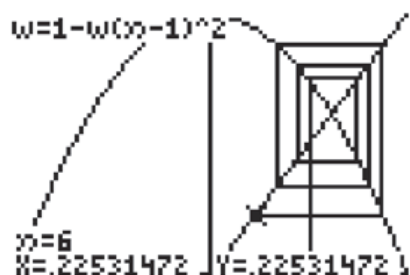
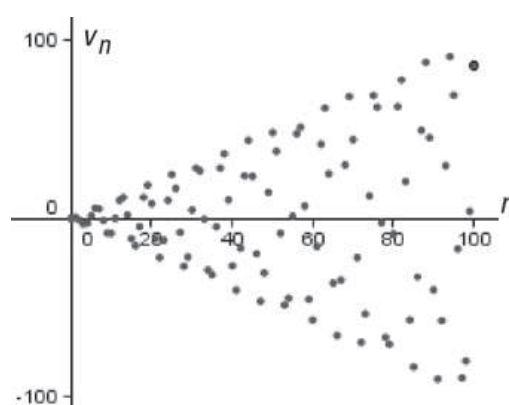
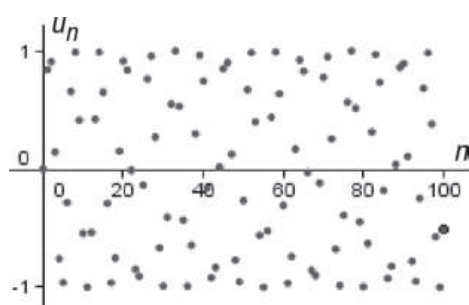
► Exemple 15 Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est une suite divergente, n'admettant pas de limite.

► **Solution** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$ donc (u_n) est bornée et ne peut donc avoir de limite infinie.

Supposons désormais que la suite (u_n) admette pour limite un certain réel ℓ . Alors, il existe un rang N au delà duquel $\ell - \frac{1}{2} < u_n < \ell + \frac{1}{2}$ autrement dit, pour tout $n \geq N$: $-\frac{1}{2} < (-1)^n - \ell < \frac{1}{2}$. Cette double inégalité conduit à $-\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$ lorsque n est impair et à $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$ lorsque n est pair d'où une contradiction. L'hypothèse émise au départ est donc fausse et la suite (u_n) n'a pas de limite.

► Exemple Sans démonstration et en se contentant de conjectures à l'aide de représentations graphiques, on peut remarquer que :

- la suite de terme général $u_n = \sin n$ est divergente et n'a pas de limite ;
- la suite de terme général $v_n = n \cos n$ est divergente et n'a pas de limite ;
- la suite (w_n) définie par la relation de récurrence $w_{n+1} = 1 - w_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = \frac{1}{2}$ est divergente et n'a pas de limite.



4. Cas des suites géométriques

Propriété 11

Soit q un réel.

- Si $q > 1$ alors la suite de terme général q^n est divergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite de terme général q^n est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite de terme général q^n est divergente et n'a pas de limite.

Propriété préliminaire

Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n , on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

■ Démonstration de l'inégalité de Bernoulli

Soit x un réel positif, démontrons par récurrence que la proposition $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on a $(1+x)^0 = 1$ et $1+0 \times x = 1$ donc la proposition est vraie au rang initial $n = 0$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(1+x)^k \geq 1+kx$. Comme $x \geq 0$, on a $1+x \geq 0$ donc, en multipliant chaque membre de l'inégalité constituant l'hypothèse de récurrence, on a : $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$ or $(1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2$. Comme $kx^2 \geq 0$, on a $(1+kx)(1+x) \geq 1+(k+1)x$ d'où $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n , on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Point historique

Nous venons de démontrer l'inégalité de Bernoulli que Jacques Bernoulli (Bâle, 1654-1705) démontra en 1689. Cependant, on peut noter que l'on rencontre ce résultat dès 1670 chez Isaac Barrow (Londres, 1630-1677).

Jacques Bernoulli est le premier d'une lignée de mathématiciens suisses.

Il s'est intéressé à différentes branches des mathématiques dont, par exemple, celle des probabilités. Dans ce domaine on lui doit, par exemple, une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face dont découlent les notions d'épreuve de Bernoulli et de loi de Bernoulli abordées en première.

■ Démonstration des propriétés concernant les limites de suites géométriques

- Soit $q > 1$.

En posant $x = q - 1$, on a $x > 0$ et, par l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Comme $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+nx) = +\infty$ puis, par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

- Soit $-1 < q < 1$.

Le résultat est évident lorsque $q = 0$. Plaçons nous dans le cas où $-1 < q < 1$

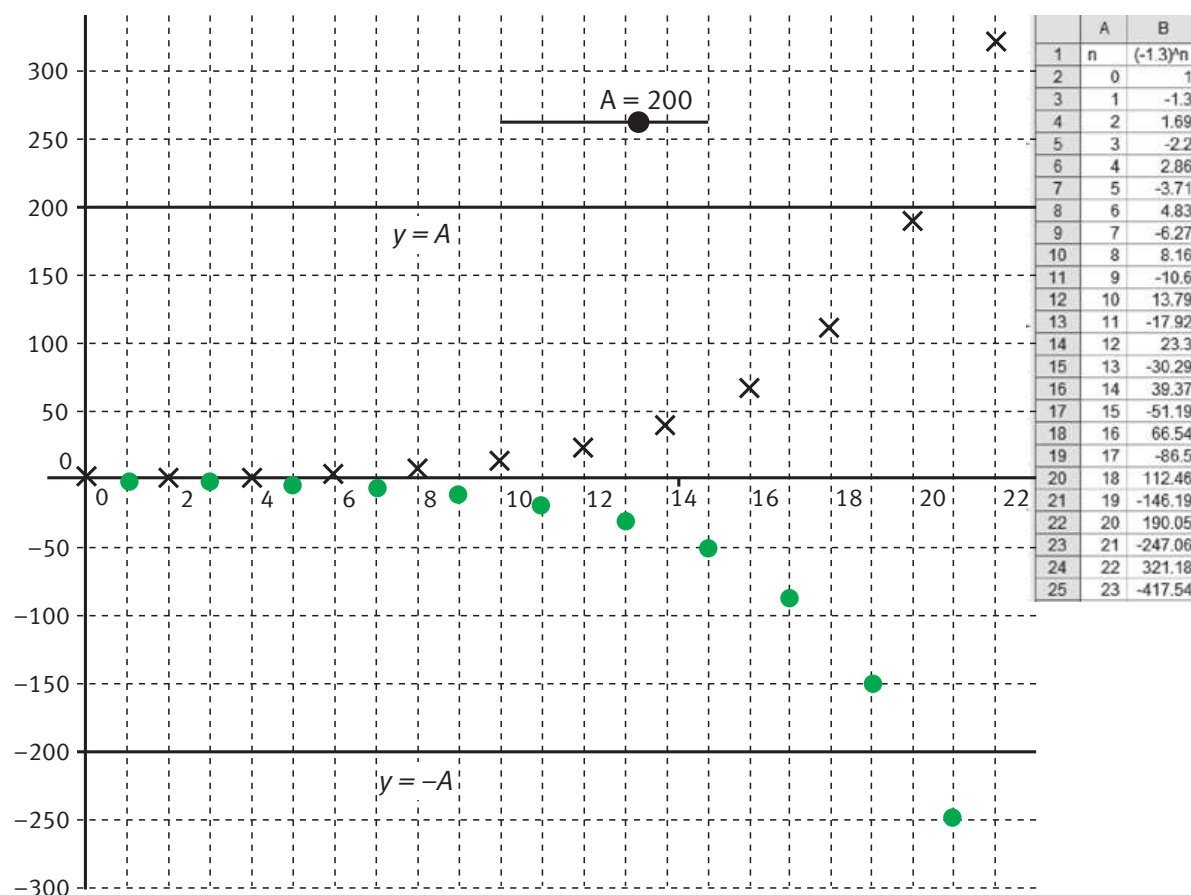
et $q \neq 0$. Alors on a $\frac{1}{|q|} > 1$ et, par le résultat précédent, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty \text{ puis, par inversion } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

- Soit $q \leq -1$.

On a $-q \geq 1$ donc la suite de terme général $(-q)^n$ est divergente et admet pour limite $+\infty$ ce qui signifie que, pour tout réel A que l'on peut choisir positif et aussi grand que l'on veut, il existe un rang N au delà duquel $(-q)^n > A$.

Lorsque n est pair, $(-q)^n = q^n$ donc, pour tout entier n pair supérieur à N , on a $q^n > A$ alors que lorsque n est impair, $(-q)^n = -q^n$ donc, pour tout entier n impair supérieur à N , on a $-q^n > A$ ou encore $q^n < -A$. La suite de terme général q^n n'est donc ni majorée, ni minorée, elle ne peut donc pas être convergente. Il apparaît plus précisément qu'elle n'a pas de limite.



► Exemple 16 Déterminer les limites éventuelles des suites de terme général :

$$a_n = 1 - 5^n, \quad b_n = (2+n)^n \text{ et } c_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

► Solution • On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ car $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

• Pour tout $n \geq 0$, $2+n \geq 2$ donc $(2+n)^n \geq 2^n$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ donc, par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

• Le réel c_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial 1. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \text{ or } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

$$\text{puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = 1 \text{ et par produit, on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{3}{2}.$$

5. Cas des suites monotones

Propriété 13

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

■ Démonstration

- Dire que (u_n) n'est pas majorée signifie que, pour tout réel A , on peut trouver un rang N tel que $u_N > A$ or la suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$ et, par suite, pour tout $n \geq N$, $u_n > A$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Le deuxième point peut être démontré en utilisant un raisonnement analogue ou bien en appliquant le résultat prouvé ci-dessus à la suite de terme général $-u_n$.

Théorème 2

Convergence monotone

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Remarque

- On admet ce théorème.
- Ce théorème permet de prouver la convergence d'une suite mais n'en donne pas la limite.

► Exemple 17 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ pour tout $n \geq 0$.

Dans les exemples 5 et 6 du chapitre 2 (Le raisonnement par récurrence), nous avons montré que (u_n) est une suite décroissante et que, pour tout $n \geq 0$, $3 \leq u_n \leq 10$. La suite (u_n) est ainsi une suite décroissante et minorée par 3 donc (u_n) est convergente d'après le théorème de la convergence monotone.

Par ailleurs, on sait que pour tout $n \geq 0$, $3 \leq u_n \leq 10$ donc en notant ℓ la limite de la suite (u_n) , on peut en déduire par passage à la limite que $3 \leq \ell \leq 10$.

À ce stade de l'étude, on dispose donc de la convergence de la suite (u_n) ainsi que d'un encadrement de la limite mais on n'a aucune information supplémentaire quant à sa valeur.



Exercices d'apprentissage

Exercice 7

Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général :

$$a_n = 3n^2 - n + \frac{1}{n} ; \quad b_n = (1-3n)(n^2 + n - 2) ; \quad c_n = \frac{1-3n^2}{(n+1)(n-2)} ;$$

$$d_n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n} ; \quad e_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3 ; \quad f_n = \frac{1}{n+5^n} ;$$

$$g_n = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+3} ; \quad h_n = 3^n - 7^n.$$

Exercice 8

- ① Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n\sqrt{n} - 1000}{n}$ pour $n \geq 1$.
- ② a) Soit A un réel. Justifier l'existence d'un rang N au delà duquel $u_n \geq A$.
b) Montrer que (u_n) est croissante.
c) Écrire un algorithme donnant le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$ où A est un réel quelconque.

Exercice 9

Déterminer la limite des suites définies par leur terme général :

$$a_n = 2n^2 - (-1)^n ; \quad b_n = \sin(\sqrt{n}) - n^3 ; \quad c_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n ; \quad d_n = \frac{n + \cos n}{3 - 2n}.$$

Exercice 10

Pour $n \geq 2$, on définit (u_n) par $u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$.

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 10 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Indication :

On pourra montrer que (u_n) est croissante et majorée.

4

Synthèse

A

Synthèse de la séquence

Le principe de récurrence

Soit une proposition $\mathcal{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n .

Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de montrer que :

- ❶ La proposition est vraie au rang n_0 ;
- ❷ pour un entier k quelconque ($k \geq n_0$), $\mathcal{P}_k$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite un réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Lorsqu'une suite (u_n) admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente (ou qu'elle converge).

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Propriété

Limites de suites convergentes usuelles

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

et plus généralement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

- Toute suite constante de terme général égal à ℓ est convergente vers ℓ .

Propriété **Unicité de la limite d'une suite convergente**

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Propriété **Opération sur les limites de suites convergentes**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' .

On admet les résultats suivants :

- la suite de terme général $u_n + v_n$ est convergente et a pour limite $\ell + \ell'$;
- la suite de terme général $u_n \times v_n$ est convergente et a pour limite $\ell \times \ell'$;
- la suite de terme général $k \times u_n$ où k est un réel est convergente et a pour limite $k \times \ell$;
- si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si $\ell' \neq 0$ alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est convergente et a pour limite $\frac{\ell}{\ell'}$.

Propriété **Compatibilité avec l'ordre**

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' .

Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$ (ou bien $u_n \leq v_n$) alors $\ell \leq \ell'$.

► **Conséquence**

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite croissante et convergente vers ℓ alors, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \ell$.

Théorème

Théorème des gendarmes

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Si (u_n) et (w_n) sont convergentes vers un même réel ℓ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ alors (v_n) est elle aussi convergente vers ℓ .

Définition

Suites divergentes de limite infinie

On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

De façon analogue, on dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A[$ où A est un réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Dans un cas comme dans l'autre, on dit que la suite est divergente.

Propriété

Limites de suites divergentes usuelles

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

et plus généralement $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés

Limite d'une somme

La limite de la somme $u_n + v_n$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$		$-\infty$
ℓ	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit

La limite du produit $u_n \times v_n$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0		
$\ell (\ell > 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell (\ell < 0)$	$-\infty$	$+\infty$

Inversion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right)$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$\ell \ (\ell \neq 0)$	$\frac{1}{\ell}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

Limite d'un quotient

La limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$					
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$+\infty$	$-\infty$	0_+	0_-	$\ell' \ (\ell' \neq 0)$
$+\infty$			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$-\infty$			$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
0	0	0			0
$\ell \ (\ell > 0)$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell \ (\ell < 0)$			$-\infty$	$+\infty$	

Propriété

Comparaison en $+\infty$

Les suites (u_n) et (v_n) sont telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété Cas de suites géométriques

Soit q un réel.

- Si $q > 1$ alors la suite de terme général q^n est divergente et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite de terme général q^n est convergente et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

- Si $q \leq -1$ alors la suite de terme général q^n est divergente et n'a pas de limite.

Propriété Cas de suites monotones divergentes

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème

Convergence monotone

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

B

Exercices de synthèse

Exercice I

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$ pour $n \geq 0$.

- 1 Démontrer que la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$ est strictement croissante sur $] -\infty ; 6[$.

- 2 a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 3$ et que la suite (u_n) est croissante.

- b) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

3 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ pour $n \geq 0$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis, après avoir exprimé u_n en fonction de v_n , conclure quant à la limite de (u_n) .

Exercice II

On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \neq -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$.

1 Montrer qu'il existe deux valeurs de u_0 tels que la suite (u_n) soit constante. On notera a et b (avec $a > b$) ces deux valeurs.

2 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$.

a) Étudier la fonction f , tracer sa courbe représentative ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$ et construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) en choisissant $u_0 = 0$.

b) Que peut-on conjecturer dans ce cas quant au comportement de la suite (u_n) ?

c) À l'aide du logiciel Geogebra ou d'un tableur, conjecturer le comportement de la suite (u_n) selon la valeur du terme initial $u_0 \neq 2$.

3 Montrer que si u_0 est différent b alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en est de même pour u_n .

4 On choisit $u_0 \neq b$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire l'expression de v_n en fonction de n , celle de u_n en fonction de n puis la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice III

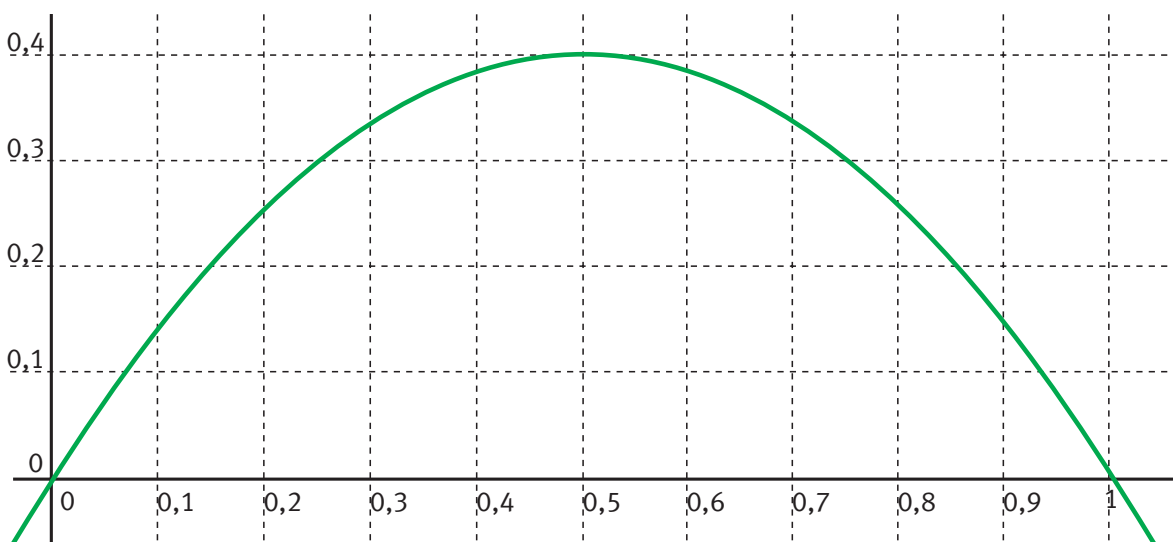
1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 1,6u_n(1 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on dispose de la représentation graphique de la courbe d'équation $y = f(x)$.

Construire en abscisse les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on formuler concernant les variations et l'éventuelle convergence de la suite (u_n) ?



- 3 a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{8}$.
 b) Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite (u_n) ?
- 4 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{3}{8} - u_{n+1} = 1,6 \left(\frac{5}{8} - u_n \right) \left(\frac{3}{8} - u_n \right)$ puis que $\frac{3}{8} - u_{n+1} \leq 0,84 \left(\frac{3}{8} - u_n \right)$.
 b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{3}{8} - u_n \leq 0,84^n$.
 c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice IV

Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes en justifiant les réponses.

- 1 Toute suite décroissante est majorée.
- 2 Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.
- 3 Toute suite croissante et majorée est bornée.
- 4 Toute suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas majorée.
- 5 Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Exercice V

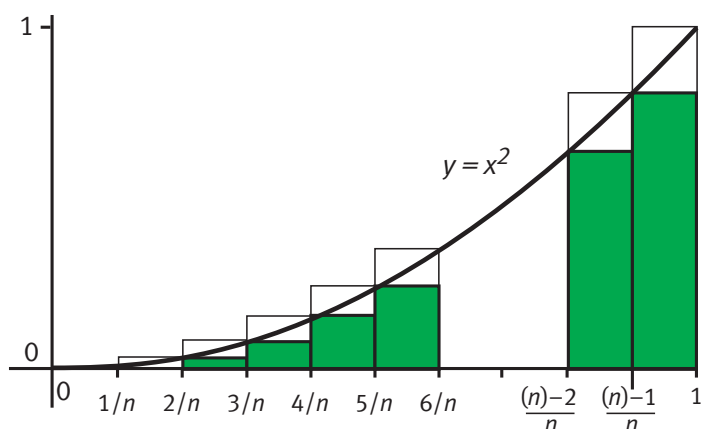
Dans chacun des cas suivants, déterminer lorsque c'est possible et en justifiant, une suite (u_n) non constante dont tous les termes sont strictement positifs, qui converge vers la valeur 2012 et qui vérifie la condition indiquée.

- 1 On a : $u_n = f(n)$ où f est une fonction homographique.

- ② La suite (u_n) est géométrique.
- ③ La suite (u_n) est la suite des sommes des n premiers termes d'une suite géométrique.
- ④ La suite (u_n) est arithmétique.

Exercice VI

On se propose de calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction carré sur l'intervalle $[0 ; 1]$, c'est-à-dire l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la représentation graphique de la fonction carrée, l'axe des abscisses ainsi que les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.



Pour cela, on partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ (où n est un entier supérieur à 1) sur lesquels on construit n rectangles situés sous la courbe et n rectangles contenant $\mathcal{D}$. On note u_n l'aire totale des rectangles situés sous la courbe et v_n l'aire totale des rectangles contenant le domaine $\mathcal{D}$. On obtient ainsi deux suites (u_n) et (v_n) encadrant l'aire A cherchée.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a : $u_n \leq A \leq v_n$.

- ① Illustrer la situation à l'aide du logiciel Geogebra afin de conjecturer le résultat.

Indications pour le faire

Représenter la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$, créer un curseur n prenant des valeurs entières puis définir les suites (u_n) et (v_n) en tapant respectivement dans la barre de saisie $u_n = \text{sommeinférieure}[f, 0, 1, n]$ et $v_n = \text{sommesupérieure}[f, 0, 1, n]$. Il suffit alors de choisir différentes valeurs pour n pour observer le comportement des suites (u_n) et (v_n) .

- ② a) Vérifier que, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ et $v_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.

- b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

et en déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .

- c) Calculer la limite de chacune de ces suites et en déduire l'aire A cherchée en unités d'aire.

Exercice VII

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{nk+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}.$$

- ❶ Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- ❷ a) Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{k}{nk+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Indications

On pourra remarquer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{k}{nk+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{k}}.$$

- b) En déduire que, pour tout n entier strictement positif, on a $\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1$.
- c) Étudier alors la convergence de la suite (u_n) .
- ❸ a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un entier p strictement positif tel que, pour tout entier $n \geq p$, on a $|u_n - 1| < 10^{-2}$?
À l'aide de la double inégalité obtenue à la question ❷ b), déterminer une condition suffisante sur p pour que $|u_n - 1| < 10^{-2}$ soit vérifiée pour tout entier $n \geq p$.
- b) Écrire et implémenter sous Algobox ou sur la calculatrice un algorithme permettant de calculer u_p où p est l'entier obtenu à la question 3.a. Donner une valeur approchée près du réel u_p .
- c) Écrire et implémenter sous Algobox ou sur la calculatrice un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier p strictement positif tel que, pour tout entier $n \geq p$, on a $|u_n - 1| < 10^{-2}$ et d'afficher la valeur de u_p correspondante. Donner les valeurs de p et de u_p obtenues dans ce cas.
- d) Comment expliquer les valeurs différentes que l'on obtient aux questions 3.a et 3.c ?

Exercice VIII

L'objectif est de comparer la vitesse à laquelle les suites $(n!)$ et (n^n) tendent vers $+\infty$.

- ❶ Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Calculer les valeurs de u_n pour des valeurs de n égales à 1, 2, 3, 10 et 100.
Que peut-on conjecturer ?

- ② On rappelle l'inégalité de Bernoulli : pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n , on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$. En déduire que $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

- ③ Déterminer la limite de (u_n) puis conclure quant aux vitesses de convergence des suites $(n!)$ et (n^n) .

Exercice IX Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

L'objectif est de déterminer la limite de la suite (u_n) ainsi que la vitesse à laquelle u_n tend vers cette limite.

- ① a) Écrire un algorithme donnant directement le terme de rang N dès que l'on dispose de la valeur de N .
b) Implémenter cet algorithme sur Algobox ou sur une calculatrice, le tester en choisissant quelques valeurs de N et conjecturer le comportement de u_n pour de grandes valeurs de n .

- ② a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

- b) En sommant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout $n \geq 1$, $2\sqrt{n} - 2 \leq u_n$ (1) et que $u_n \leq 2\sqrt{n+1}$ (2).

- ③ a) Déterminer la limite de (u_n) .

- b) On dit que v_n est équivalent à u_n lorsque (v_n) et (u_n) convergent (ou divergent vers $-\infty$ ou $+\infty$) à la même vitesse, c'est-à-dire lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Déterminer un équivalent de u_n sous la forme $v_n = f(n)$ où f est une fonction simple.

Exercice X Introduction historique à l'exercice.

Le but de cet exercice est de présenter un algorithme donnant une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre.

L'extraction de racines carrées a toujours été d'un grand intérêt au cours de l'histoire des mathématiques. C'est ainsi qu'au fil des siècles, on rencontre diverses méthodes, géométriques ou arithmétiques.

Parmi celles-ci, l'algorithme de Héron dont il sera question dans l'exercice occupe une place de choix.

Héron d'Alexandrie (fin du 1^{er} siècle après J.-C.) était un mathématicien dont on ne sait que peu de choses. C'est seulement en 1896 qu'on découvre à Constantinople le livre I de ses *Métriques*, dans lequel on trouve, entre autre, un exposé de sa méthode de recherche de racines carrées. Sans qu'il soit précisé la

démarche qui l'a conduit à un tel résultat, Héron calcule des valeurs approchées de racines carrées comme convergence d'une suite de nombres obtenus par itérations successives d'une formule.

Afin de présenter ce travail, raisonnons selon un point de vue géométrique. Pour construire un carré ayant même aire qu'un rectangle d'aire donnée A , on peut construire un rectangle de même aire dont l'un des côtés est la moyenne arithmétique des côtés du précédent puis recommencer le procédé plusieurs fois. La suite des longueurs des côtés des rectangles successifs convergera vers $\sqrt{A}$. Traduisons cette méthode dans le cadre numérique.

On note u_n la longueur d'un des côtés du rectangle à la n -ième étape de l'algorithme.

À l'étape initiale, on considère donc un rectangle d'aire A strictement positive et dont un côté mesure un nombre u_0 quelconque.

La longueur du rectangle à la $(n+1)$ -ième doit donc être la moyenne arithmétique des côtés du rectangle obtenu à la n -ième étape or ces côtés sont u_n et $\frac{A}{u_n}$ de sorte que l'on ait $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right)$.

L'algorithme de Héron consistera à utiliser la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right)$ et de terme initial u_0 quelconque et positif.

On choisira pour cet exercice $u_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ où la fonction E est la fonction « partie entière ».

- 1 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{A}{x} \right)$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Pour les représentations graphiques, on prendra 5 cm comme unité et on travaillera avec $A = 2$.

a) Étudier les variations de f .

b) Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

- 2 On considère donc la suite (u_n) défini sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Sur le graphique précédent, représenter les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer le comportement asymptotique de (u_n) .

b) Démontrer par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{A} \leq u_{k+1} \leq u_k \leq u_0$.

c) En déduire la convergence de la suite (u_n) .

- 3 a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{A})$.

b) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2^n} (u_0 - \sqrt{A})$.

c) Conclure quant à la limite de la suite (u_n) .

④ Dans le cas où $A = 2$, déterminer à l'aide de la calculatrice et de l'inégalité obtenue au 3.b une condition suffisante sur n pour que $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$.

Déterminer le plus petit entier n au-delà duquel $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-10}$. Expliquer la différence entre les résultats obtenus. Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers sa limite ?

⑤ Écrire l'algorithme de Héron donnant une approximation de $\sqrt{A}$ avec une erreur strictement inférieure à un réel p donné.

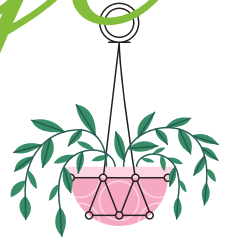
Exercice XI

Quelle est la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur à 1 par :

$$u_1 = 0,57, \quad u_2 = 0,5757, \quad \dots, \quad u_n = 0, \underbrace{57\dots57}_{2n \text{ chiffres}} ?$$



Bon courage



LIENS UTILES 🙌

Visiter :

1. <https://biologie-maroc.com>

- Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. <https://biologie-maroc.com/shop/>

- Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
- Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
- Trouver des bourses et des écoles privées

3. <https://biologie-maroc.com/emploi/>

- Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
- Trouver des offres d'emploi et de stage

