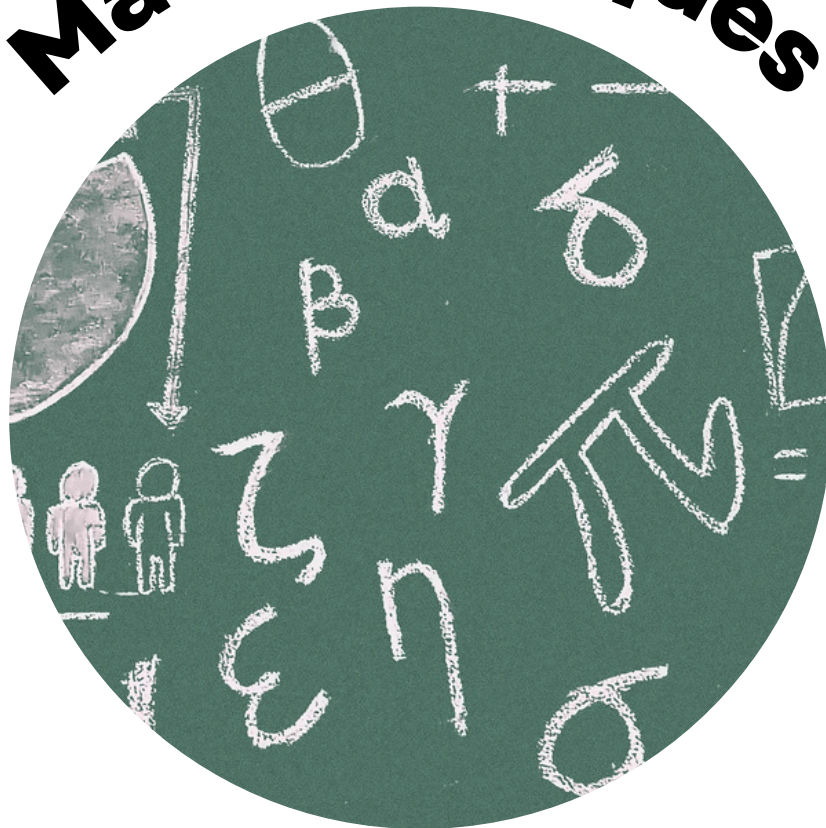


# Mathématiques



## SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE



### Shop



- Cahiers de Biologie + Lexique
- Accessoires de Biologie



### Etudier



Visiter [Biologie Maroc](http://www.biologie-maroc.com) pour étudier et passer des QUIZ et QCM en ligne et Télécharger TD, TP et Examens résolus.



### Emploi



- CV • Lettres de motivation • Demandes...
- Offres d'emploi
- Offres de stage & PFE

Lundi 13 oct 2014

# Les fonctions

## I - Généralité:

Def:

$$f: u \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe } \in \mathbb{R}\}$$

Exemple:  $f(x) = \frac{1}{x}$   $f(0^+) = \frac{1}{0^+} = +\infty \in \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$   
 $f(x) = \sqrt{1-x}$   $1-x \geq 0; x \leq 1 \cdot \mathbb{D}_f = ]-\infty, 1]$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \mathbb{D}_f = ]-\infty, 1[$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad 1-x^2 = (1-x)(1+x) \geq 0 \quad \mathbb{D}_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x^2-1} \quad \mathbb{D}_f = ]-\infty, -1] \cup ]1, +\infty[$$

$$f(x) = \text{Log}(x+1) \cdot \mathbb{D}_f = ]-1, +\infty[$$

Rappel:  $\mathbb{D}_f = ]0, +\infty[$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

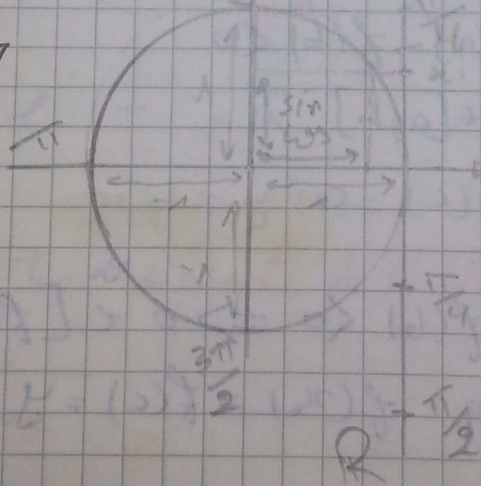
$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$\mathbb{D}_f \frac{1}{\sin x} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi\}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{D}_f \frac{1}{\cos} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}\}$$

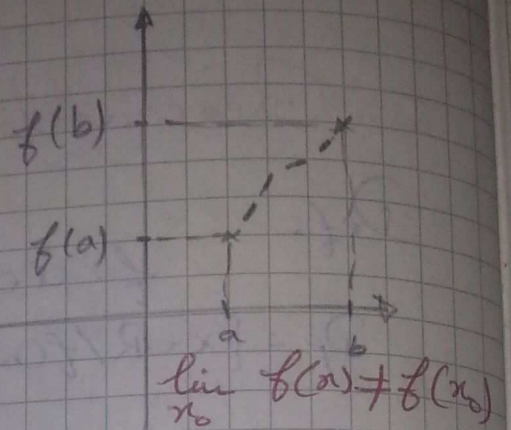
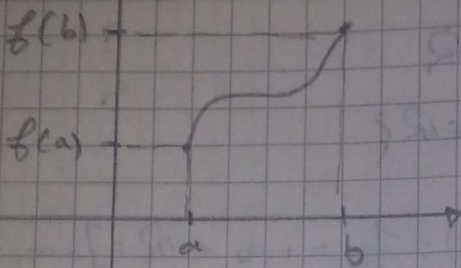
$k \in \mathbb{Z}$



## II - Continuité :

$$f: I \xrightarrow{\in \mathbb{R}} J \xrightarrow{\in \mathbb{R}}$$

$I = [a, b]$



$f$  : est continue en  $x_0$  on :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

### Théorème des Valeurs Intermédiaires

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  : continue sur  $[a, b]$

Alors :  $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]$ ,  $\exists x_0 \in [a, b]$

tq :  $f(x_0) = y_0$

### Théorème des Valeurs Intermédiaires : 2

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue

et  $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors :  $\exists c \in [a, b]$

tq  $f(c) = 0$

Par ce que  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow 0 \stackrel{y_0}{\in} [f(a), f(b)]$   
 $\exists x_0 = c$  tq  $f(x_0) = f(c) = y_0 = 0$

## Application

Démontrer par le T.V.I que  
l'équation  $x^7 + x - 1 = 0$   
admet une solution dans  $[0, 1]$

On pose  $f(x) = x^7 + x - 1$   
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$$

$\exists c \in [0, 1]$ , tq  $f(c) = 0$

$f(c) = c^7 + c - 1$ . c. à. d.  $c \in [0, 1]$  est une solution  
de l'équation  $x^7 + x - 1 = 0$

## III - Dérivation (Dérivation d'une fonction)

Def Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

( $x_0 \in I$ ) on dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \text{ (existe } \in \mathbb{R}) = f'(x_0)$$

la fonction

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

$f'$  = la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

## Fonction dérivées de certaines $f'$

Fonction	Fonction dérivée	Domaine
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\text{Log } x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$n \in \mathbb{N}$ $f^n(x)$	$n f^{n-1} \cdot f'(x)$	$\textcircled{II} f$
$\mathbb{R} \ni f, g$ $f \circ g$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$\textcircled{II} f \circ g$
$g \neq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	

Exemple:  $(\sqrt{1-x^2})'$

$$\begin{aligned}
 g(x) = (\sqrt{1-x^2})' &= ((1-x)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1-x^2)' \\
 &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

### Exercice:

Trouver les  $f'$  dérivées de  $f$  suivantes:

1.  $f(x) = \text{Log}(1 - e^{2x+1})$

2.  $g(x) = e^{2\sqrt{1-x^2}}$

3.  $h(x) = \sqrt{1 - \text{Log}(2x+1)}$

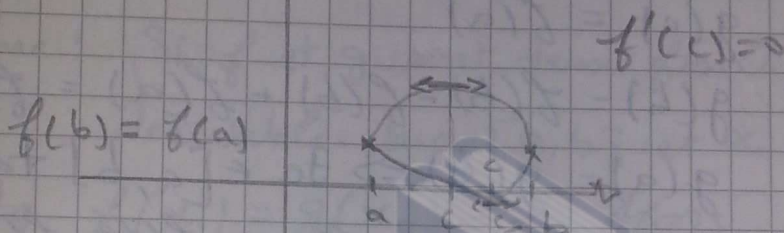
4.  $i(x) = \frac{1}{g}(2 \text{Log}(x) + \sqrt{1-x^2})$

## Théorème de Rolle

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est  
dérivable et  $f(a) = f(b)$

alors  $\exists c \in ]a, b[$

$$\text{tq } \boxed{f'(c) = 0}$$



## Application

Nous avons déjà vu que l'équation:  $x^7 + x - 1 = 0$   
possède une solution dans  $[0, 1]$   
montrer par le théorème de Rolle que cette solution  
est unique.

~~Alors~~ Soit  $c_1$  une solution de  $x^7 + x - 1 = 0$

supposons:  $\exists c_2 \neq c_1$  tq  $c_2^7 + c_2 - 1 = 0$

On prend  $f(x) = x^7 + x - 1 \Rightarrow f(c_1) = f(c_2) = 0$

T. Rolle  $\exists c_3 \in [c_1, c_2]$  tq  $f'(c_3) = 0$

$$f'(x) = 7x^6 + 1 \text{ mais } 7x^6 + 1 > 0 \Rightarrow f'(c_3) > 0$$

Contradiction donc  $c_1$  est unique.

Lundi 27 oct 2014

## Théorème des accroissements finis

Théorème: Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

dérivable sur  $[a, b]$ , alors:

$$(\exists c \in [a, b]) \text{ tq } \overbrace{f(b) - f(a)} = \overbrace{(b-a) \cdot f'(c)}$$

Dém: on pose  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$g(a) = g(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ tq}$$

$$g'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

$$\text{Car } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

## Application

Démontrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$  on a

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

Dém: on pose  $f(x) = \log(x)$

$$[x, x+1] \quad \left| \begin{array}{l} a = x \\ b = x+1 \end{array} \right.$$

$x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f(x)$  est dérivable

$$\exists c \in ]x, x+1[ \text{ tq}$$

$$f(x+1) - f(x) = (x+1 - x) f'(c)$$

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{c}$$

$$c \in ]x, x+1[ \Rightarrow x < c < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

Donc:  $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$

## Règle de l'Hospital

**Théorème**: Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions:  
 dérivable sur  $[a, b]$  et  $x_0 \in ]a, b[$   
 tq  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  Alors.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Démonstration

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0) = 0}{g(x) - g(x_0) = 0} \\ &= \lim_{x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

## Application

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$



# Les suites

## Définition

Toute Application

$$f: I \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto f(n) = U_n$$

Notation:

on not  $f(n) = U_n$

-  $f = (U_n)_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$  = une suite (numérique)

-  $U_n$  = Le terme général de la suite

## I. Identification d'une suite:

Une suite est définie par

1. un en fonction de  $n$

Exemple soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$

$$\text{définie par } U_n = \frac{2n+1}{n} = f(n)$$

$$U_1 = 3; U_2 = \frac{5}{2} \dots$$

$$\text{Si on pose } f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

$$U_n = f(n)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

2. ou bien: Définie par une relation de récurrence

Exemple soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = 6 \\ U_2 = 16 \end{cases}$$

## Suite Croissante et Suite décroissante

Def: On dit que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad (U_{n+1} \geq U_n)$$

\* on dit que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

$$\text{Si } U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad (U_{n+1} \leq U_n)$$

Exemple.

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad U_n = n^2$$

$$U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 = U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$$

et  $(U_n)$  est croissante.

Exemple.

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \quad U_n = \frac{1}{n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} \\ = - \left( \frac{1}{n(n+1)} \right) < 0$$

$$U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n) \text{ est décroissante.}$$

## Suite majorée et suite minorée

Def: \* on dit que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée

si il existe  $A \in \mathbb{R}$

$$\text{Tq: } U_n \leq A \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

\* on dit que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée

si il existe  $a \in \mathbb{R}$

$$\text{Tq: } U_n \geq a \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

### Exemple

- la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $U_n = \frac{1}{n}$  est majorée par 1  
car  $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \frac{1}{n} \leq 1$
- $\frac{1}{n} \geq 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )  
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $U_n = \frac{1}{n}$  est minorée par 0

### Théorème :

- Toute suite croissante majorée est Convergente.
- Toute suite croissante minorée est Convergente.

### Exemple : (Exercice)

soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est croissante et majorée

### Exemple (Exercice)

soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+2}} \end{cases}$$

Démontrer que  $(U_n)$  décroissante minorée et calculer la limite de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Lundi 3 Nov 2014

Rep:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée  $\Leftrightarrow u_n \geq 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

Démontrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (u_n \geq 0)$$

Verification:  $u_0 = 1 \geq 0$

Supposition: on suppose que  $u_n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N} / u_n \geq 0 \\ \text{donc } (u_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que  $(u_n)$  est décroissante:

Il faut montrer par récurrence que:

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

1°/ Verification:

$$(n=0): u_1 - u_0 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \leq 0$$

2°/ Supposition:

on suppose que  $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 2} - \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n u_{n+1} + 2u_{n+1} + u_n + 2 - u_n u_{n+1} - u_{n+1} - 2u_n - 2}{(u_{n+1} + 2)(u_n + 2)}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1} + 2)(u_n + 2)} \leq 0$$

on résout de démontrer que

$$\text{si } u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow (u_{n+2} - u_{n+1}) \leq 0$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante.

Résumer:  $(u_n)$  est donc convergente  
Car elle est décroissante minorée

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases} ; f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

Théorème:

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente  
et  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  avec  $u_{n+1} = f(u_n)$   
et  $f$  continue. Alors: la limite  $l$   
vérifie l'équation  $f(l) = l$

Exemple:

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est convergente et trouver sa limite.  
1°  $u_n$  est croissante car (par récurrence)

Vérif  $u_1 - u_0 = \sqrt{5} - 2 \geq 0$  ( $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ )

supposons que:  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_{n+1} + 3} - \sqrt{u_n + 3})(\sqrt{u_{n+1} + 3} + \sqrt{u_n + 3})}{(\sqrt{u_{n+1} + 3} + \sqrt{u_n + 3})}$$

$$= \frac{u_{n+1} + 3 - u_n - 3}{(\sqrt{u_{n+1} + 3} + \sqrt{u_n + 3})} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(\sqrt{u_{n+1} + 3} + \sqrt{u_n + 3})} \geq 0$$

$\Rightarrow (U_n)$  est croissante

• Montrons que  $(U_n)$  est majorée par 3  
C.à.d.  $(\forall n \in \mathbb{N}) (U_n \leq 3)$

(par récurrence)

Verification:  $U_0 = 2 \leq 3$

Supposition: on suppose que  $U_n \leq 3$

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} \leq \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$$

Si  $U_n < 3 \Rightarrow U_{n+1} < 3 \Rightarrow (U_n)$  majorée par 0

on a  $(U_n)$  est croissante majorée donc elle est convergente

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3} = f(U_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{x + 3}$$

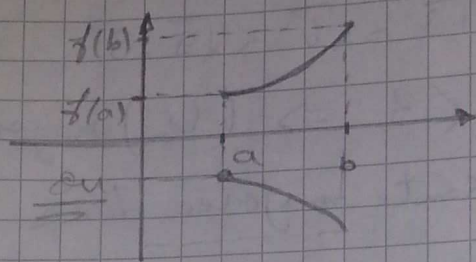
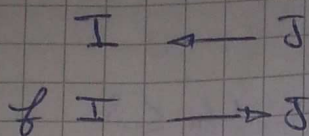
$$l = f(l) \Rightarrow l = \sqrt{l + 3}$$

$$l^2 - l - 3 = 0; \Delta = 1 + 12 = 13$$

$$l_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

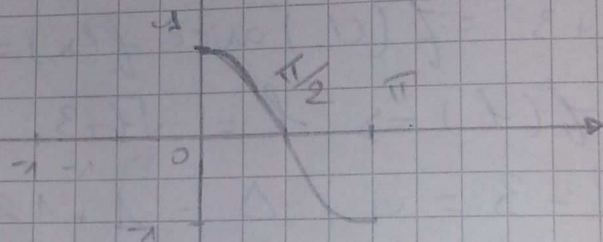
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

# Fonctions réciproques des fonctions circulaires (Trigonométriques)



Cos:

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$



1) Définition:

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection (car elle est strictement décroissante et continue).

Donc elle possède une fonction réciproque:

$$\text{Arc cos}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc cos } x = y \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos y = x \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc cos } 1 = y \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos y = 1 \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right) \Rightarrow y = 0$$

$$\boxed{\text{Arc cos } 1 = 0}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc cos } 0 = y \\ 0 \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos y = 0 \\ y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{array} \right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Arc cos } (0) = \frac{\pi}{2}}$$

1) Définition :  $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$   
est une fonction bijective (car strictement croissante et continue)

$$\text{Arc sin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc sin } x = y \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sin y = x \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc sin } 0 = y \\ 0 \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sin y = 0 \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right) \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \text{et } \boxed{\text{Arc sin}(0) = 0}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc sin } 1 = y \\ 1 \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sin y = 1 \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Arc sin } 1 = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice

$$\text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

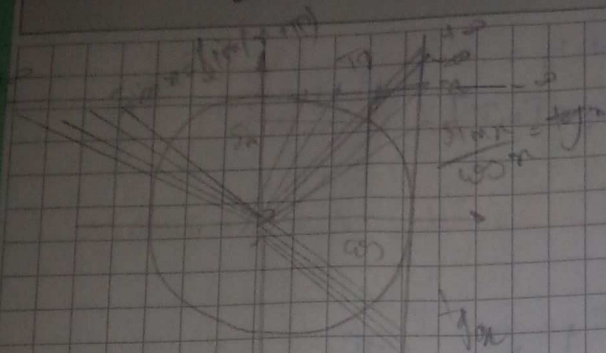
$$; \text{Arc sin } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$; \text{Arc sin } \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Lundi: 17 Nov 2014



$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg}: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-\infty, +\infty[ \text{ bijective}$$

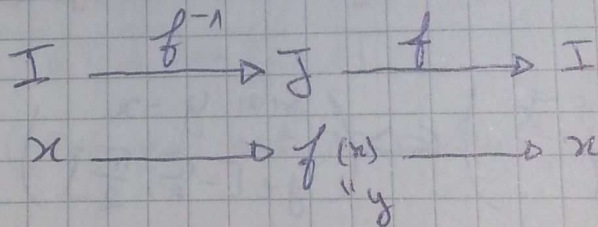
$$\operatorname{tg}: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-\infty, +\infty[$$

$$\operatorname{Arc\,tg}: ]-\infty, +\infty[ \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\operatorname{Co\,tg}(x) = ]0, \pi[ \rightarrow ]-\infty, +\infty[$$

$$\operatorname{Arc\,cotg}: ]-\infty, +\infty[ \rightarrow ]0, \pi[$$

Derivées des fonctions réciproque de fonction trigonométrique ?



$$f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow (f \circ f^{-1}(x))' = (x)' = 1$$

$$f'(f^{-1}(x)) = (f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } y = f(x)$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } y = f(x)$$

## Application

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc cos } x = y \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos y = x \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right)$$

1)  $(\text{Arc cos } x)' = \frac{1}{\cos' y}$  avec  $\cos y = x$



$$\cos' y = -\sin y$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\Rightarrow \sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y} \quad (\cos y \in [0, \pi])$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in ]-1, 1[ \\ (\text{Arc cos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

$$\forall x \in ]-1, 1[$$

$$(\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

App :

$$\forall x \in [-1, 1] \text{ on a } \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{on pose } f(x) = \text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x$$

on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

on a  $f'(x) = 0$  Donc  $f$  est une constante

$$f(0) = \text{Arc sin}(0) + \text{Arc cos}(0)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc cos}(0) = y \\ 0 \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos y = 0 \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Arc Sin}(0) = y \\ 0 \in [-1, 1] \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sin y = 0 \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right) \Rightarrow y = 0$$

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \text{Arc Sin } x + \text{Arc Cos } x = \frac{\pi}{2}$$

Verifie que  $\text{Arc Cos}(-1) + \text{Arc Sin}(-1) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Arc Cos}(1) + \text{Arc Sin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc :  $\forall x \in [-1, 1]$  on a

$$\left( \text{Arc Sin } x + \text{Arc Cos } x = \frac{\pi}{2} \right)$$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty, +\infty[$  :

$$\left( \text{Arc tg}(x) \right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} (\text{Arc tg}(x))' &= \frac{1}{\text{tg}'(y)} \quad \text{avec } (\text{tg}(y) = x) \\ &= \frac{1}{1 + \text{tg}^2(y)} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$\forall x \in ]-\infty, +\infty[$

$$\left( \text{Arc cotg}(x) \right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

App :  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $\text{Arc tg}(x) + \text{Arc cotg}(x) = \frac{\pi}{2}$

# Intégration:

## I - Fonction primitive

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une  $f^c$

on dit que  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est

une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$

Si  $(\forall x \in [a, b]) F'(x) = f(x)$

## Exemple

Fonction	Fonction Primitive	Intégralle
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arc tg}(x)$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arc cotg}(x)$	$\mathbb{R}$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\text{Log}(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{Arc cos } x$	$] -1, 1 [$

Remarque:

- Si  $F$  est primitive alors:  $\forall C \in \mathbb{R}$   
 $G(x) = F(x) + C$  est aussi primitive de  $f$

Car:

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

- Si  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  alors:

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \text{ tq: } F(x) = G(x) + \lambda$$

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= G(b) + \lambda - G(a) - \lambda \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

## II - Intégrale définie:

Soit  $f$  une  $f: [a, b]$  que possède une primitive

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$

Alors  $F(b) - F(a)$  est indépendant de choix  $F$

on le note  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

l'intégrale définie de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$

Exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos(0) = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

Exemple :  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\text{Arc sin}(x)]_0^1 = \text{Arc sin} 1 - \text{Arc sin} 0 = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ F(x) = \text{Arc sin} x \end{cases}$$

### III. Intégrale indéfinie

$f$  intégrale indéfinie de  $f$  on le note.

$$\int f(x) dx = \text{représente une primitive de } f$$

Lundi 24 Nov 2014

### IV. Intégrations par parties

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables

alors on a

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Dem

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) g(x)$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b (f(x) g(x))' dx - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Exemple

Trouver  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

on pose:  $f(x) = x$  et  $g'(x) = \cos x$

$f'(x) = 1$  et  $g(x) = \sin x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi - 2}{2}$$

V. Integrations par changement de variable :

$$\left. \begin{array}{l} I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{e } f \circ g \\ \text{Derivables} \end{array}$$

$$\text{Eq : } g(\alpha) = a \text{ et } g(\beta) = b$$

$$\text{On a : } \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt$$

Dem

Soit  $F$  une primitive de  $f$

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \times g'(t) = f(g(t)) \times g'(t)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (F \circ g)'(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$F(b) - F(a) = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \times g'(t) \, dt$$

Dans la pratique :

$$\int_a^b f(x) \, dx \xrightarrow{x = g(t)} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) \, dt$$

$dx = g'(t) dt$

$g(\alpha) = a \text{ et } g(\beta) = b$

## Exemple

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

on pose  $x = \sin t$   
 $dx = \cos t dt$

$x=0 \Rightarrow t=0 \Leftrightarrow \alpha$

$x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x}$$

$$= \cos x$$

Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

## formule

### trigonométrique:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$



# Equations

## Differentielles

### I. Définition

on appelle équation différentielles toute équation  
dont l'inconnue est une fonction

#### Exemple:

Trouver la fonction  $f$  qui vérifie

$$(2x^2 + 1) f''(x) + (1 - x) f'(x) + 2f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (E)$$

#### Notation

on note  $y = f(x)$   $y' = f'(x)$

$$(E) \quad (2x^2 + 1) y'' + (1 - x) y' + 2y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{et } \frac{dy}{dx} = y'$$

### II. Equation différentielles à variables séparés

#### Def:

on appelle équation différentielle à variables  
séparés tout E.D. de la forme

$$h(y) y' = g(x)$$

$h$  et  $g$  deux fonctions.

$$h(y)y' = g(x) \Rightarrow h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\Rightarrow h(y) dy = g(x) dx$$

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx$$

Exemple:

Résoudre l'E.D.

$$e^y y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(y) = e^y \\ g(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow e^y dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int e^y dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$e^y = \text{Arc tg}(x) + C$$

$$\text{Log}(e^y) = \text{Log}(\text{Arc tg}(x) + C) \quad (\text{Arc tg}(x) + C > 0)$$

$$S' = \left\{ y = \text{Log}(\text{Arc tg}(x) + C) \right\}$$

Verification

$$e^y y' = e^{\text{Log}(\text{Arc tg}(x) + C)} \cdot \frac{1}{(\text{Arc tg}(x) + C)} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= (\text{Arc tg}(x) + C) \cdot \frac{1}{(\text{Arc tg}(x) + C)} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$e^y y' = \frac{1}{1+x^2}$$

### III - Equation Différentielles du 1<sup>er</sup> ordre.

Def: C'est toute E.D. de la forme

$$h(x)y' + g(x)y = f(x)$$

avec  $h, g$  et  $f$  sont des fonctions

dans le même domaine  
E.D. S.S.M  $\Leftrightarrow h(x)y' + g(x)y = 0$

avec  
E.D. A.S.M  $\Leftrightarrow h(x)y' + g(x)y = f(x)$

Si  $y_1$  est solution de l'E.D. S.S.M.

et  $y_0$  une solution particulière de l'E.D. A.S.M

alors la solution générale de (E)

est  $y = y_0 + y_1$

Car:

$$\begin{aligned} h(x)(y_0 + y_1)' + g(x)(y_0 + y_1) &= \underbrace{h(x)y_0' + g(x)y_0}_{f(x)} + \underbrace{h(x)y_1' + g(x)y_1}_0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Pour résoudre l'E.D. S.S.M

$$h(x)y' + g(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(x)} dx$$

$$\left\{ \frac{1}{y} dy = - \frac{g(x)}{h(x)} dx \right\}$$

Equation à variables séparées

Exemple :

Résoudre l'E.D. suivante.

$$y' + xy = x^4 + 3x^2 + x$$

Sachant que  $y_0 = x^3 + 1$  est une solution

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y \Rightarrow \frac{1}{y} dy = -x \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} = \int -x dx$$

$$\log y = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y_1 = e^{-\frac{x^2}{2} + c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$S = \left\{ e^{-\left(\frac{x^2}{2} + 2\right)} + x^3 + 1 ; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Lundi 1 Dec 2014

Exemple Résoudre l'E.D.

$$(E) \cos^2 x y' + \sin^2 x y = 1 + x \sin^2 x.$$

sachant que  $y_0 = x+1$  est une solution particulière de (E)

et vérifiant que  $y_0 = x+1$  est une solution.

$$\cos^2 x (x+1)' + \sin^2 x (x+1) = \cos^2 x + x \sin^2 x + \sin^2 x = 1 + x \sin^2 x$$

Il reste à trouver  $y_1$  la solution générale de

$$\cos^2 x y' + \sin^2 x y = 0$$

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} = -\sin^2 x y$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\tan^2 x dx$$

$$\frac{1}{y} dy = -\tan^2 x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \tan^2 x dx + c$$

$$\log y = (-\tan x) + c$$

$$y = e^{(x - \tan x) + c} = e^{(x - \tan x)} \cdot e^c = \frac{e^c}{\lambda} \cdot e^{x - \tan x}$$

$$\left\{ \frac{y}{\lambda} = \lambda \cdot e^{x - \tan x} \right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Verification

$$\begin{aligned} & \cos^2 x (\lambda e^{(x - \tan x)})' + \sin^2 x (\lambda e^{(x - \tan x)}) \\ &= -\cos^2 x (\tan^2 x) \lambda e^{(x - \tan x)} + \sin^2 x (\lambda e^{(x - \tan x)}) \\ &= -\sin^2 x \lambda e^{(x - \tan x)} + \sin^2 x \lambda (e^{(x - \tan x)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \left\{ S' = \frac{y}{\lambda} + \frac{y}{\lambda} = x + 1 + \lambda e^{(x - \tan x)} \right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

IV. Equation Differentielle du second ordre:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad \begin{matrix} (a,b,c) \in \mathbb{R} \\ f \text{ est une } f^c \end{matrix}$$

$y_1$  = la solution générale de l'E.S.S.M  
 $ay'' + by' + cy = 0$

$y_0$  = une solution particulière de l'E.A.S.M  
 $ay'' + by' + cy = f(x)$

$$S = y_0 + y_1$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$  equation caractéristique

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$

$z_1 = p + qi ; z_2 = p - qi$

S.E.C

$$y_1 = e^{px} (\alpha \sin qx + \beta \cos qx) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$\Delta = 0$

$r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = (\alpha x + \beta) e^{rx} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$\Delta > 0$

$r_1$  et  $r_2$  deux solutions de l'E.C

$$y_1 = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exemple: Soit l'E.D:  $y'' - 6y' + 5y = 4\sin x - 6\cos x$

a) Vérifie que  $y_0 = \sin x$  est une solution

b) Résoudre cette E

Rep

$$(\sin x)'' - 6(\sin x)' + 5(\sin x) = -\sin x - 6\cos x + 5\sin x = 4\sin x - 6\cos x$$

S.P. solution particulière

Donc  $y_0$  est une S.P

$y_n$  est solution de  $y'' - 6y' + 5y = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Delta = 36 - 20 = 16 > 0$$

$$r_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad ; \quad r_2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

$$\Rightarrow y_n = \alpha e^x + \beta e^{5x} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Donc:

$$S = y_0 + y_n = \sin x + \alpha e^x + \beta e^{5x} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Exemple 2 (E):  $y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 3\operatorname{Arctg} x - \frac{2\sqrt{3}x^2 + 2x + 6}{(1+x^2)^2}$

a) Vérifier que  $y_0 = \operatorname{Arctg} x$  est une S

b) En déduire la S.G de (E)

G: générale

a) ? (la même méthode)

b)  $y_n$  ?

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0 \quad \text{E.C. } x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$\Delta = 12 - 12 = 0$$

$$r = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_n = (\alpha x + \beta) e^{\sqrt{3}x}$$

### Exemple 3.

$$(E) \quad y'' - 2\sqrt{2}y' + 3y = 3e^{2\sqrt{2}x}$$

a) Vérifier que  $y_0 = e^{2\sqrt{2}x}$  une S de (E)

b) En déduire la S. G de (E)

$$\begin{aligned} a) \quad & (e^{2\sqrt{2}x})'' + 2\sqrt{2}(e^{2\sqrt{2}x})' + 3e^{2\sqrt{2}x} \\ &= 2\sqrt{2}(e^{2\sqrt{2}x})' - 8e^{2\sqrt{2}x} + 3e^{2\sqrt{2}x} \\ &= 8e^{2\sqrt{2}x} - 8e^{2\sqrt{2}x} + 3e^{2\sqrt{2}x} \\ &= 3e^{2\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

$y_0$  est S. de  $y'' - 2\sqrt{2}y' + 3y = 0$

$$E.C = x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8 - 12 = -4 \quad / \Delta = 2i$$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2i}{2} = \sqrt{2} + i \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2} - i$$

$$p = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad q = \Delta \Rightarrow y_1 = e^{\sqrt{2}x} (\alpha \sin x + \beta \cos x) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

Donc

$$S = y_0 + y_1 = e^{2\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x} (\alpha \sin x + \beta \cos x) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$



Algebre

Lundi 8 Dec 2014

# Systeme d'equation Determinant Matrice.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

C'est un systeme de m equation et n inconnues

## Methode de Cramer

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$A \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  C'est une matrice de  $m$  lignes et  $n$  colonnes

Exemple  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  C'est une matrice de 3 lignes et 3 colonnes. C'est une matrice carrée.

$X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$  C'est une matrice de  $m$  lignes et 1 colonne

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot X = B$$

Dans  $\mathbb{R}$   $a \neq 0$

$$a \cdot (a^{-1}) = 1$$

$$(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} \cdot B$$

$$a^{-1} \left( \frac{1}{a} \right) x = \frac{1}{a} b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$a^{-1} (a \cdot x) = b \Rightarrow x = (a^{-1})b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \boxed{X = A^{-1} B}$$

# Calcul Matriciel

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + \dots + a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,1} + \dots + a_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{m,s}$$

$$(M_{m,n} +)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} + \dots + b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbb{R}; +, \cdot, /, -)$$

$(M_{m,n}; \cdot)$  multiplication par un scalaire.

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$-3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplication de 2 Matrices

$$A \in M_{m,n} \quad B \in M_{n,k} \Rightarrow A \cdot B \in M_{m,k}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1k} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1k} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a'_{11} + \dots + a_{1n} \cdot a'_{nk} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Exemple

$$M_{3,3} \quad M_{3,2} = M_{3,2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Multiplication de 2 Matrices

$$A \in M_{m,n} \quad X \in M_{n,n} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow \text{Systeme}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Systeme

$$A^{-1} \begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n^{-1} \cdot n = 1 \end{cases}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = A$$

Inverse d'une matrice

$$(n=2, m=2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{d \text{ et } A} \quad \text{com}(A)$$

determinant  $(\det A = ab - bc)$

comatrice  $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$t_{\text{com}(A)} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple  $t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Com  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple résoudre le système suivant par le calcul matriciel

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -3x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A & X & B \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Com A =  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$   
 $t$  Com A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

det A = -5  $\in$  (1, 1 - 2, 3)

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot t \text{com}(A) = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$   
(10 = 6 + 4, 15 = 12 + 3)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$

$S = \{(-2, -3)\}$

Exemple: Résoudre avec le calcul matriciel

$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

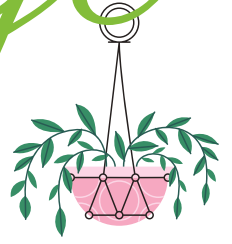
## Analyse : Les fonctions

- I - Généralité sur les fonctions
- II - Continuité
- III - Dérivation
- IV - Intégration
- V - Equation Différentiation

## Algèbre :

- I - Les Matrices.
- II - Détermination
- III - ~~Cystesse~~ Equation

# Bon courage



## LIENS UTILES 🙌

### Visiter :

1. <https://biologie-maroc.com>

- Télécharger des cours, TD, TP et examens résolus (PDF Gratuit)

2. <https://biologie-maroc.com/shop/>

- Acheter des cahiers personnalisés + Lexiques et notions.
- Trouver des cadeaux et accessoires pour biologistes et géologues.
- Trouver des bourses et des écoles privées

3. <https://biologie-maroc.com/emploi/>

- Télécharger des exemples des CV, lettres de motivation, demandes de ...
- Trouver des offres d'emploi et de stage

